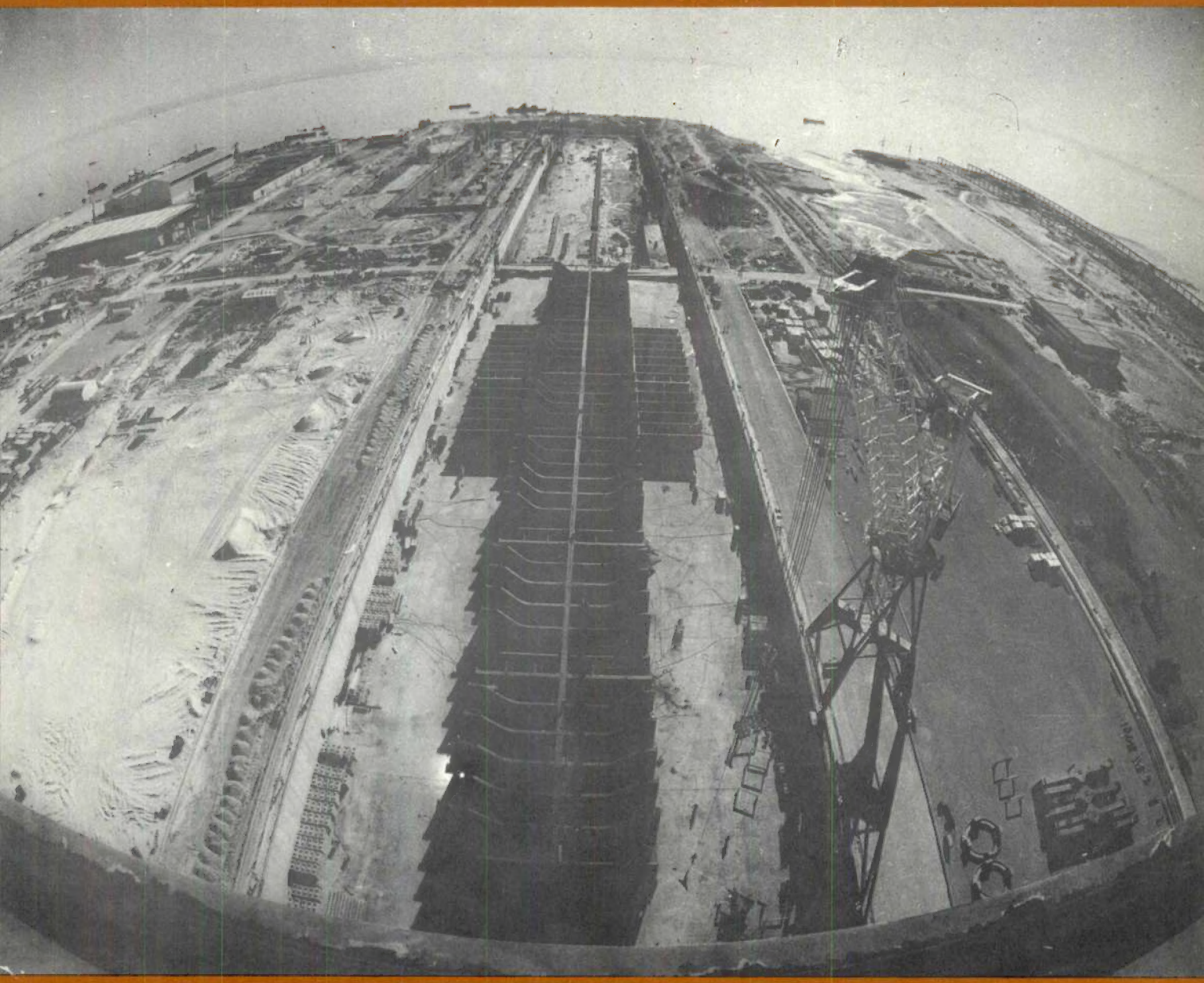
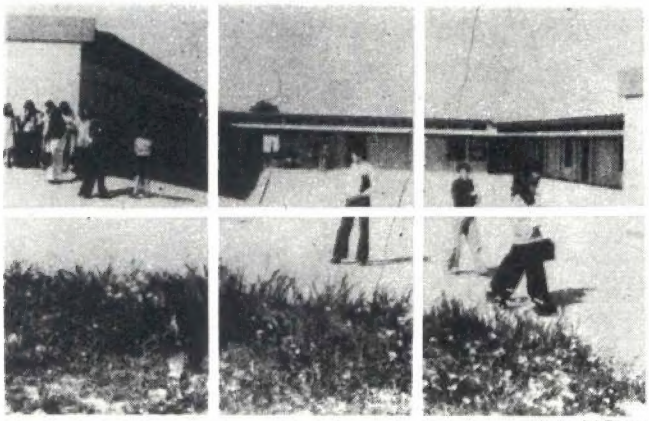
técnica



430 associação dos estudantes do instituto superior técnico
novembro 1975 revista de engenharia

PRÉ-FABRICAÇÃO
em betão



MOITA

EDIFÍCIOS ESCOLARES
HABITAÇÃO SOCIAL
ESCRITÓRIOS
FÁBRICAS
MORADIAS
ETC.

materiais novobra

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda, Moita, Luanda e Lourenço Marques
Stands de exposição em: Aveiro, Évora e Faro
Sede: Av. Est. Unidos da América, 100, 5.º - Dto. - Lisboa 5
Telefones - Serviços Administrativos: 77 48 32 - 77 29 53 · Telex: 18375 Novoba P
Serviços Técnicos: 71 41 16/7/8 - 71 93 31/2

CONSTRUA COM CONFIANÇA - CONSULTE-NOS

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA

S. A. R. L.

SEDE

Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO

TELEFONES: 2 76 76 / 77 / 78 / 79 — Est. 90

DELEGAÇÃO

Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA

TEL.: 73 11 81/82/83/84/85/86 - 73 33 33 - 4 84 91

●

ELECTRICIDADE DO LINDOSO
E DAS CENTRAIS DO FREIXO
E DA CACHOFARRA

●

A **UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA** distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal (cerca de 2 500 km), energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.

Carnaxide — Tel. 219 00 37

técnica

NÚMERO 430 NOVEMBRO DE 1975 ANO L VOLUME XXXVII PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR

Delmar Baptista

COLABORADORES

António Maria da Fonseca

José Agostinho Marques

Jorge Braz

Armando Ruano

Manuel M. S. Anastácio

José Luís S. V. Azevedo

DIRECÇÃO REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO

Av. Rovisco Pais, I. S. T. — Lisboa
Telefone 72 93 23

PROPRIETÁRIO

A. E. I. S. T.

★

ASSINATURAS:	5 n.os	10 n.os
Continente e ilhas	140$00	250$.
Países de língua Portuguesa e Espanha	150$00	270$.
Estrangeiro	—	300$.
Número avulso ...	—	35$.

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabiliade dos autores.

★

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:
MOVIGRÁFICA
Rua do Espírito Santo, 19-A - Odivelas

SUMÁRIO

47 — ANTÓNIO A. S. DE BARROS — *Análise das características mecânicas de um escoamento radial numa turbomáquina centrífuga.*

Theoretical analysis of the mechanical features of the flow in a centrifugal turbomachine.

67 — J. A. MARTINHO SIMÕES e C. A. NIETO DE CASTRO — *Termodinâmica molecular do gás perfeito.*

Molecular thermodynamics of the perfect gas.

81 — J. M. GONÇALVES FIGUEIRA — *Orientação do projecto de docas secas (estaleiro naval da Setenave, Setúbal).*

Requirements for dry docks design (Setenave shipyard, Setúbal).

CAPA — Estaleiro da Setenave, Setúbal. Vista durante a construção do conjunto das 3 docas secas, mostrando já o início da montagem do casco do primeiro navio.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
Construções Técnicas	VII
Construções Schréder	2.ª da capa
EFACEC	IX
Electrotécnicos Reunidos . . .	VIII
Electro-Arco, Lda.	X
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	VI
Fanafel	VI
Ferrunil	II
MAGUE	V
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Rotring	III
Sociedade Portuguesa Cavan . .	II
S. K. F., Lda.	I
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sopecate	X
União Eléctrica Portuguesa . . .	2.ª da capa

SKF

A SKF não tem apenas rolamentos de esferas e de rolos .

Temos também rolamentos de agulhas

rótulas e embutes .

Evidentemente, temos do mesmo modo toda a espécie de acessórios para rolamentos.

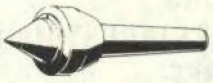
Além disso a SKF fabrica muitos outros produtos de qualidade.

Rodas e carretos cónicos, por exemplo

Fusos roscados de rolamento de alta precisão que transformam o movimento de rotação em linear.

Fabricamos também machos cassonetes

e brocas .

O mesmo se passa com pontos rotativos  .

E muitos sabem que também temos um bom Serviço Técnico.

SOCIEDADE SKF LIMITADA

LISBOA - PRAÇA DA ALEGRIA, 66-A
TELEF.: 362301 - TELEGR.: ESKAEF - TELEX: 12156

PORTO - RUA DELFIM FERREIRA, 604
TELEF.: 692054 - TELEGR.: ESKAEF

Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

FERRUNIL
CONSTRUÇÕES METÁLICAS INDUSTRIAIS, LDA

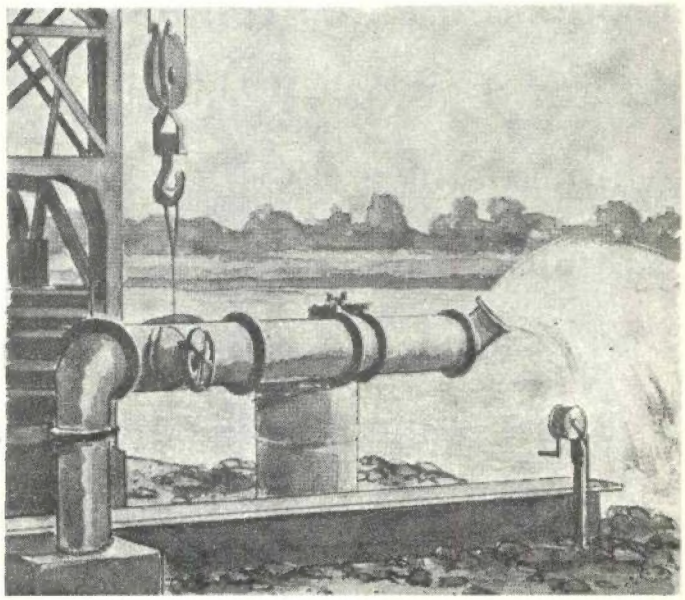
ESTRUTURAS - RESERVATÓRIOS
VIGAMENTOS - SILOS
PONTES ROLANTES
EQUIPAMENTO INDUSTRIAL

COBERTURAS PARA:
ARMAZÉNS
UNIDADES INDUSTRIAIS
HANGARES
PAVILHÕES DESPORTIVOS, ETC.

FÁBRICA:
Trajouce 244 0230
244 0256

ESCRITÓRIOS:
Av. Elias Garcia, 162, 2º E (L1) *77 77 96
*77 77 97
*77 75 29
LISBOA *77 26 35

Água: eis o que lhe oferecemos!



- Pesquisas e captações de água
- Estudos hidrogeológicos
- Sondagens e Fundações
- Rebaixamento de níveis aquíferos

ACAVACO

R. Rodrigo da Fonseca, 62, r. c-Esq. - Lisboa-1
Tel. 56 11 71/2/3/4

CARAN D'ACHE

SWISS MADE

Professional 1

0777. ...
TECHNOGRAPH:
Lápis para desenho técnico, mina grafite micronizada, qualidade superior, madeira de cedro, 17 graduações (9H a 6B)

0301. ...
PRO JUVENTUTE. Lápis de grafite de qualidade superior para desenho e escrita, 10 graduações (5H a 3B)

FIXPENCIL:
Lapiseira de metal leve, esmaltado a preto ou em cores. Não escorrega da mão. Pinça patentada para fixar a mina, funcionamento extremamente suave do mecanismo.

0005. NOVO
FIXPENCIL 0,5 lapiseira da máxima precisão, tubo condutor «pipe slide system», para minas de 0,5 mm de diâmetro, borracha incorporada. Corpo vermelho ou preto.

0002.
Lapiseira para minas de 2 mm diâmetro, com a parte dianteira anti-derrapante.

0003.
Para minas de 3 mm de diâmetro, com a parte dianteira anti-derrapante.

0022.
Para minas de 2 mm de diâmetro, com apara-minas incorporado.

0077.
Modelo mais comprido, destinado aos desenhadores profissionais, minas de 2 mm de diâmetro, também com a parte dianteira anti-derrapante.

0884.
FIXPENCIL com corpo metálico colorido, para minas de 2 mm de diâmetro, com apara-minas incorporado.

6077.
Minas TECHNOGRAPH de primeira qualidade, comprimento 120 mm, diâmetro 2 mm, 14 graduações (3B - 9H).

6099.
Minas de cores PRISMATEC, comprimento 120 mm, diâmetro 2 mm, 12 cores diferentes.

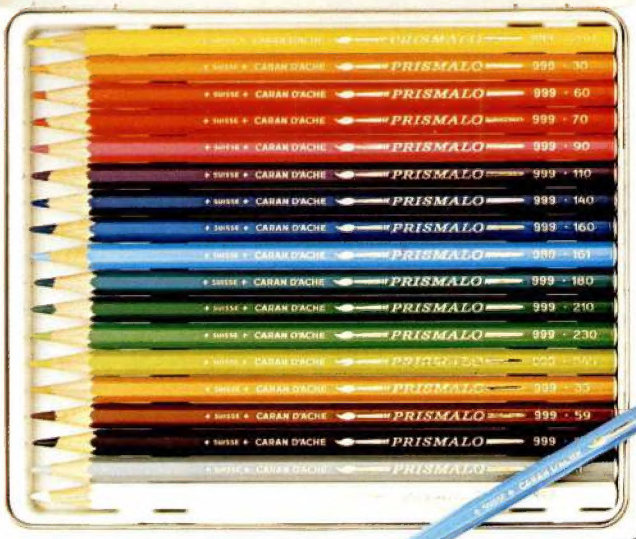
6705.
Minas de grafite diâmetro 0,5 mm para FIXPENCIL 0,5
Comprimento 60 mm
graduações B, HB, H, 2H.

0143.320
Sélection. Borracha de apagar fina e macia para minas de grafite e cores.

0145.320
Sélection. Mesma qualidade como a 143, porém mais pequena.

0161.320
Apagador plástico, cortado, obliquamente, para papel muito delicado.

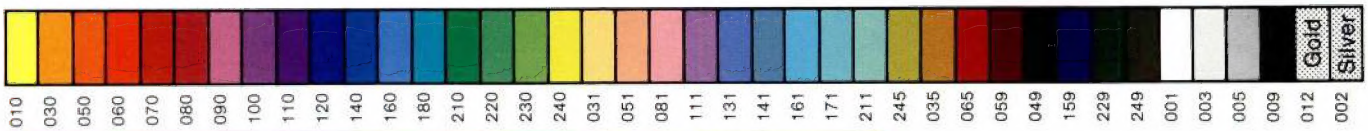
0160.310
Apagador plástico, forma rectangular.



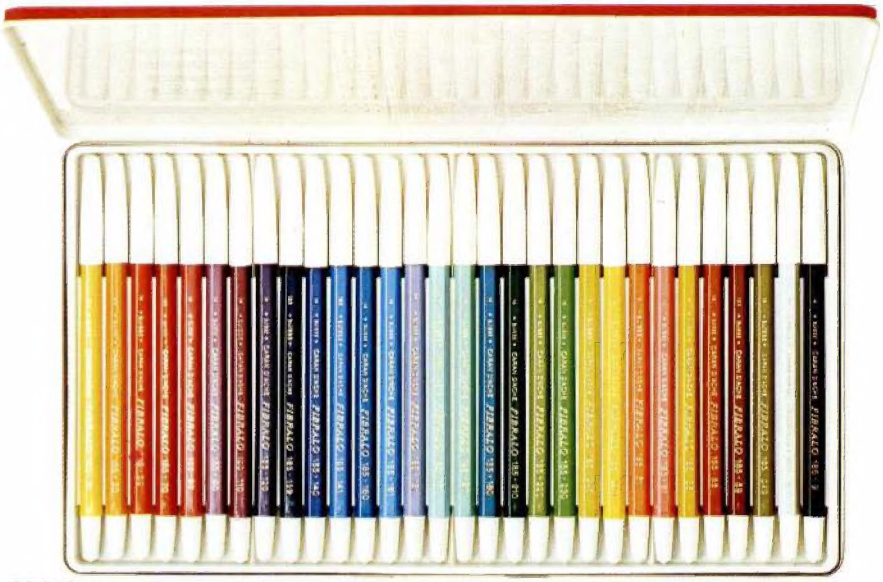
0455.000
Máquina para aparar lápis. Corpo de metal. Paragem automática. Para todos os lápis redondos ou hexagonais de 4 a 10 mm de diâmetro, com grampo de fixação universal.

0999. ...
PRISMALO. Lápis de cor para desenhos finos e detalhados, mina de qualidade extraordinária, muito resistente, aguarelavel, diâmetro 3 mm. Caixas com 6, 12, 18, 30 e 40 cores sortidas. Não tóxico.

PRISMALO 40 cores avulsas em caixas de 12 por cor.

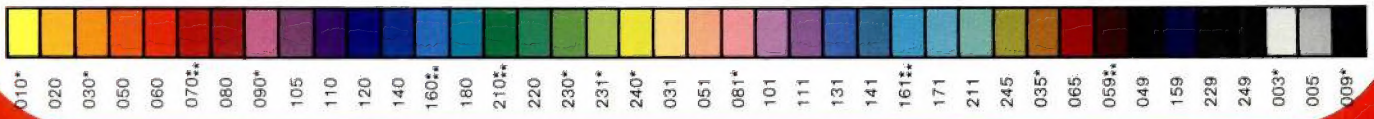


010 030 050 060 070 080 090 100 110 120 140 160 180 210 220 230 240 031 051 081 111 131 141 161 171 211 245 035 065 059 049 159 229 249 001 003 005 009 012 002



0185.330
Marcador com ponta de fibra FIBRALO, ponta especial para desenhar, cores luminosas. Caixas metálicas de 10, 15, 30 e 40 cores sortidas. As cores 9, 10, 30, 59, 70, 90, 140, 161, 210 e 230, podem ser fornecidas separadamente em embalagens de 10 por cor.

0187.000
Marcador com ponta de fibra FIBRALO-FINE, ponta especial para escrever, suave mas resistente. Caixa de metal com 10 cores sortidas 5 Cores avulsas fornecidas separadamente.



010* 020 030* 050 060 070*** 080 090* 105 110 120 140 160** 180 210** 220 230* 231* 240* 031 051 081* 101 111 131 141 161** 171 211 245 035* 065 059** 049 159 229 249 003* 005 009*

Artur Westheimer, Lda.
R. Maria Andrade, 42-2°
Lisboa-1
Tel. 843242

TECNICA IV
Impresso na Suiça Janeiro 1975 10 000 exemplares

Ref. PR. 4000.1

técnica

NÚMERO 430 NOVEMBRO DE 1975 ANO L VOLUME XXXVII PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 621-135:532.5

Análise teorica das características mecânicas de um escoamento radial numa turbomáquina centrífuga (*)

ANTÓNIO A. S. DE BARROS

RESUMO

Neste trabalho são apresentadas, de uma forma condensada, as deduções das equações gerais das velocidades e acelerações e energia num escoamento sem perdas no interior da roda de uma turbomáquina radial. É, seguidamente, feita a aplicação das equações estabelecidas a vários escoamentos: escoamento a energia constante e escoamentos com aumento de energia (velocidade relativa constante, inclinação redial constante e pá plana) e, finalmente, escoamentos com entrada e saída impostas: pá circular e variação linear da inclinação tangencial.

SUMMARY

This study establish the velouty and aceleration equations for the flow in a centrifugal turbomachine, wich are applied to some types of flow: without and with energy increase.

1 — INTRODUÇÃO

É com o objectivo de analizar diferentes hipóteses de escoamentos em turbomáquinas radiais que o presente trabalho é desenvolvido, procurando avaliar quantitativamente os valores das velocidades e acelerações em jogo, variação de pressão ao longo da pá e energia total do escoamento.

Os escoamentos estudados são: escoamentos a energia constante como caso limite, escoamento segundo uma espiral logarítmica, escoamento com velocidado relativa constante e, pá plana. São também estudados os escoamentos em torno de uma pá circular e escoamento com variação linear da velocidade relativa. O estudo é ilustrado com uma aplicação numérica.

A consideração de escoamentos unidimensionais é, como se sabe, demasiado simplista mas nem por isso é menos importante o seu estudo pois que é a partir deles e aplicando certas correcções que se prevê o desenvolvimento dos escoamentos nas turbomáquinas radiais.

As relações apresentadas visam, essencialmente, uma aplicação directa a perfis de pás bem conhecidos que poderão ser assim convenientemente comparados.

Todos os conceitos, embora muito simples, são sempre abordados com a preocupação de evidenciar a aplicação dos teoremas da Mecânica aos escoamentos unidimensionais.

2 — CINÉTICA DO ESCOAMENTO

A — Coordenadas Intrínsecas

No início deste estudo começamos por admitir um escoamento sem perdas no interior da roda de uma turbomáquina radial com um número de pás infinito.

Considerêmos um referencial xOy, solidário com a

* Este estudo foi realizado durante o período em que o autor prestou serviço no Laboratório de Física e Engenharia Nucleares (J E N).

roda da máquina, e um referencial XOY, fixo. Utilizando um sistema de coordenadas intrínsecas, vamos designar por

$$\bar{r} = r\,\bar{r}_1 \qquad (2.1)$$

o vector de posição de uma partícula de fluído P; por convenção (figura 1)

r é o módulo do vector $\bar{r}$

$\bar{r}_1$ é o versor segundo a direcção de r

θ é o ângulo de r com o eixo Ox

φ é o ângulo de Ox com o eixo OX

É imediato que o vector

$$\frac{d\bar{r}_1}{d\theta} = \bar{\theta}_1 \qquad (2.2)$$

tem também módulo unitário e direcção perpendicular a $\bar{r}_1$.

A velocidade relativa (no referencial xOy) do ponto P é:

$$\bar{w} = \frac{d}{dt}(r\,\bar{r}_1) = \frac{dr}{dt}\bar{r}_1 + r\frac{d\theta}{dt}\bar{\theta}_1 \qquad (2.3)$$

Derivando novamente obtemos a aceleração relativa:

$$\bar{w}' = \frac{d\bar{w}}{dt} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\bar{r}_1 + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\bar{\theta}_1 \qquad (2.4)$$

uma vez que

$$\frac{d\bar{\theta}_1}{d\theta} = -\bar{r}_1 \qquad (2.5)$$

A velocidade do transporte (do ponto P suposto fixo em xOy) é dada por

$$\bar{u} = r\frac{d\varphi}{dt}\bar{\theta}_1 \qquad (2.6)$$

Admitindo, porém

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{Constante} \qquad (2.7)$$

obtemos

$$\bar{u} = \omega\, r\,\bar{\theta}_1 \qquad (2.8)$$

A velocidade absoluta (no referencial XOY) define-se por:

$$\bar{c} = \bar{u} + \bar{w} \qquad (2.9)$$

ou, por substituição

$$\bar{c} = \frac{dr}{dt}\bar{r}_1 + r\left(\frac{d\theta}{dt} + \omega\right)\bar{\theta}_1 \qquad (2.10)$$

A aceleração de transporte (ou centrífuga), proveniente do movimento de rotação da roda, é:

$$\bar{u}' = \frac{d\bar{u}}{dt} = -\omega^2\, r\,\bar{r}_1 \qquad (2.11)$$

e a aceleração de Coriolis $\bar{a}_c$, perpendicular, em cada ponto, à superfície da pá ($\bar{a}_c \bullet \bar{w} = 0$)*, com origem na acção da pá em movimento sobre o fluído:

$$\bar{a}_c = 2\omega\left(-r\frac{d\theta}{dt}\bar{r}_1 + \frac{dr}{dt}\bar{\theta}_1\right) \qquad (2.12)$$

A aceleração absoluta

$$\bar{c}' = \bar{w}' + \bar{u}' + \bar{a}_c \qquad (2.13)$$

pode, em face dos resultados anteriores, apresentar a forma

$$\bar{c}' = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt} + \omega\right)^2\right]\bar{r}_1 + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt} + \omega\right)\right]\bar{\theta}_1 \qquad (2.14)$$

B — Triângulo de Velocidades

Numa turbomáquina em movimento as trajectórias das partículas de fluído podem ser observadas segundo dois referenciais diferentes: relativamente ao referencial ligado à roda ou ao referencial fixo da máquina; as velocidades são, também, diferentes em cada um daqueles referenciais, designando-se, respectivamente, por velocidades relativa e absoluta, ligadas vectorialmente, como vimos atrás, pela velocidade de transporte.

As linhas de corrente, paralelas à velocidade relativa, são impostas pela forma das pás da máquina, gerando-se um campo de velocidades na roda para cada velocidade angular de rotação.

Nem todas as componentes da velocidade são dependentes da forma das pás: a velocidade de transporte só depende da velocidade de rotação e a velocidade radial:

$$w_r = \frac{dr}{dt} \qquad (2.15)$$

para fluídos incompressíveis, é apenas função do caudal escoado pela máquina.

Designando por triângulo de velocidades a representação da composição vectorial das velocidades num ponto de um escoamento estacionário (figura 2) definimos os ângulos

α = formado pelos vectores $\bar{u}$ e $\bar{c}$

β = formado pelos vectores $\bar{u}$ e $\bar{w}$

* O sinal • simboliza o produto escalar de vectores

O ângulo β define a inclinação tangencial das linhas de corrente no referencial solidário com a roda. Convencionando afectar de um índice r a projecção de um vector segundo a direcção radial e de um índice θ a projecção de um vector segundo a direcção tangencial, podemos escrever, por aplicação imediata das expressões das velocidades:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{c_r}{c\theta} = \frac{\dfrac{dr}{dt}}{r\left(\dfrac{d\theta}{dt} + \omega\right)} = \frac{dr}{dt} \qquad (2.16)$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{w_r}{w\theta} = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} \qquad (2.17)$$

De (2.17) tiram-se as relações

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\mathrm{cotg}\ \beta}{r} \qquad (2.18)$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} = -\frac{\mathrm{cosec}^2\beta}{r^2}\frac{d\beta}{dr} - \frac{\mathrm{cotg}\beta}{r} \qquad (2.19)$$

que serão utilizadas na obtenção de equações particulares da velocidade e aceleração.

Podem, também, tirar-se da figura 2 algumas relações fundamentais, tais como:

$$\bar{c}_r = \bar{w}_r = \bar{w}\ \mathrm{sen}\ \beta = \bar{c}\ \mathrm{sen}\ \alpha \qquad (2.20)$$

$$\bar{u} = \bar{c}_\theta - \bar{w}_\theta = \bar{c}\ \cos\ \alpha - \bar{w}\ \cos\ \beta \qquad (2.21)$$

Na construção dos triângulos de velocidades usualmente utilizada (figura 2-II) define-se a posição do vector w relativamente ao vector $\bar{u}$ mediante um ângulo β', relacionado com β por

$$\beta' = \pi - \beta \qquad (2.22)$$

podendo então escrever-se (2.21) na forma

$$\bar{u} = \bar{c}\ \cos\ \alpha + \bar{w}\ \cos\ \beta' \qquad (2.23)$$

C — Linhas de Corrente

A forma das linhas de corrente no referencial solidário com a roda, o único tipo de linhas de corrente referido nestas considerações, está intimamente relacionado com a forma e disposição das pás, podendo admitir-se uma sobreposição perfeita num escoamento com um número de pás infinito.

Partindo da expressão (2.17) e conhecida a relação

$$\beta = \beta(r) \qquad (2.24)$$

para um tipo de pás em estudo, podemos obter, por integração:

$$\theta - \theta_1 = \int_{r_1}^{r} \frac{\mathrm{cotg}\ \beta}{r}\, dr \qquad (2.25)$$

ou fazendo $\theta_1 = \lambda$ sendo λ constante e $0 < \lambda < 2\pi$:

$$\theta = \int_{r_1}^{r} \frac{\mathrm{cotg}\ \beta}{r}\, dr + \lambda \qquad (2.26)$$

designada por equação geral das linhas de corrente.

Gerando uma superfície cilíndrica deslocando uma recta, paralela ao eixo da roda, sobre uma linha de corrente (figura 3), obtemos uma superfície que convencionamos designar por superfície de corrente.

O comprimento elementar ds de uma linha de corrente obtém-se a partir da aplicação do teorema de Pitágoras a um triângulo infinitesimal (figura 4). Então:

$$(ds)^2 = (r\ d\theta)^2 + (dr)^2 \qquad (2.27)$$

ou

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2} \qquad (2.28)$$

ou ainda, recorrendo a (2.18)

$$ds = \mathrm{cosec}\ \beta\ dr \qquad (2.29)$$

Integrando esta expressão entre r_2 e r_1

$$s = \left| \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{cosec}\ \beta\ dr \right| \qquad (2.30)$$

obtemos o perímetro da linha de corrente entre dois pontos de posição conhecida.

D — Equipotenciais

As linhas perpendiculares em cada ponto às linhas de corrente denominam-se equipotenciais, cuja equação se obtém a partir da expressão (2.17) uma vez que ao ângulo de inclinação tangencial da linha de corrente corresponde um ângulo de inclinação tangencial da equipotencial $\beta + \pi/2$. Então

$$\mathrm{tg}\ (\beta + \pi/2) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} \qquad (2.31)$$

ou

$$\mathrm{cotg}\ \beta = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} \qquad (2.32)$$

Integrando obtemos

$$\theta = -\int_{r_1}^{r} \frac{\mathrm{tg}\ \beta}{r}\, dr + \nu \qquad (2.33)$$

em que ν é constante e $0 < \nu < 2\pi$

Imaginemas agora que pretendemos estudar uma propriedade de escoamento ao longo de uma normal entre duas linhas de corrente. Admitamos que as expressões analíticas dessas duas linhas de corrente são

$$\theta = \lambda_a + \int_{r_1}^{r} \frac{\mathrm{cotg}\ \beta}{r}\, dr \qquad (2.26\text{-A})$$

$$\theta = \lambda_b + \int_{r_1}^{r} \frac{\mathrm{cotg}\ \beta}{r}\, dr \qquad (2.26\text{-B})$$

e da normal

$$\theta = \nu_k - \int_{r_1}^{r} \frac{\operatorname{tg}\beta}{r}\, dr \qquad (2.33)$$

e que a normal encontra a primeira linha de corrente no raio r , conhecido, e a segunda no raio r_b, desconhecido.

Para $r = r_a$ vem $\theta = \theta_a$ e

$$\theta_a = \lambda_a + \int_{r_1}^{r_a} \frac{\operatorname{cotg}\beta}{r}\, dr \qquad (2.34\text{-A})$$

$$\theta_a = \nu_k - \int_{r_1}^{r_a} \frac{\operatorname{tg}\beta}{r}\, dr \qquad (2.34\text{-B})$$

ou, por eliminação de θ_a e explicitação em ν_k

$$\nu_k = \lambda_a + \int_{r_1}^{r_a} \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{cotg}\beta}{r}\, dr \qquad (2.35)$$

Para $r = r_b$ vem $\theta = \theta_b$ e

$$\theta_b = \lambda_b + \int_{r_1}^{r_b} \frac{\operatorname{cotg}\beta}{r}\, dr \qquad (2.36\text{-A})$$

$$\theta_b = \nu_k - \int_{r_1}^{r_b} \frac{\operatorname{tg}\beta}{r}\, dr \qquad (2.36\text{-B})$$

donde eliminando agora θ_b e substituindo ν_k pelo seu valor obtemos:

$$\int_{r_1}^{r_a} \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{cotg}\beta}{r}\, dr - \int_{r_1}^{r_b} \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{cotg}\beta}{r}\, dr = \lambda_b - \lambda_a \qquad (2.37)$$

ou ainda

$$\int_{r_a}^{r_b} \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{cotg}\beta}{r}\, dr = \lambda_a - \lambda_b \qquad (2.38)$$

Depois de feita a integração e resolvendo esta equação em ordem a r_b obtemos o seu valor que tínhamos admitido desconhecido.

3 — COMPONENTES PARALELAS E NORMAIS AS LINHAS DE CORRENTE

A — Transformação de Coordenadas

Determinaremos agora a forma de decompor um vector, representado pelas suas componentes radial e tangencial, segundo as direcções da tangente e da normal às linhas de corrente. Então, atendendo às convenções feitas:

$$\bar{w} = w_r\, \bar{r}_1 + w_\theta\, \bar{\theta}_1 \qquad (3.1)$$

Introduzindo um versor $\bar{z}_1$, paralelo ao eixo da roda tal que define com $\bar{r}_1$ e $\bar{\theta}_1$ um triedro directo ($\bar{z}_1 \times \bar{r}_1 = \bar{\theta}_1$)* obtemos um vector perpendicular a w realizando o produto vectorial $\bar{z}_1 \times \bar{w}$ ou, atendendo a (3.1):

$$z_1 \times w = w_\theta\, \bar{r}_1 + w_r\, \bar{\theta}_1 \qquad (3.2)$$

Resolvendo o sistema constituído pelas equações (3.1) e (3.2) em ordem a $\bar{r}_1$ e $\bar{\theta}_1$ obtemos:

$$\bar{r}_1 = \frac{w_r}{w^2}\, \bar{w} - \frac{w_\theta}{w^2}\, (\bar{z}_1 \times \bar{w}) \qquad (3.3)$$

$$\bar{\theta}_1 = \frac{w_\theta}{w^2}\, \bar{w} + \frac{w_r}{w^2}\, (\bar{z}_1 \times \bar{w}) \qquad (3.4)$$

que nos definem a decomposição dos vectores $\bar{r}_1$ e $\bar{\theta}_1$ segundo as direcções $\bar{w}$ e $(\bar{z}_1 \times \bar{w})$.

Se preferimos utilizar os versores daquelas direcções

$$\bar{t}_1 = \frac{\bar{w}}{w} \qquad (3.5)$$

$$\bar{n}_1 = \frac{\bar{z}_1 \times \bar{w}}{w} \qquad (3.6)$$

podemos escrever

$$\bar{r}_1 = \operatorname{sen}\beta\, \bar{t}_1 - \cos\beta\, \bar{n}_1 \qquad (3.7)$$

$$\bar{\theta}_1 = \cos\beta\, \bar{t}_1 + \operatorname{sen}\beta\, \bar{n}_1 \qquad (3.8)$$

Esta transformação de coordenadas pode ser efectuada por meio de um operador matricial da forma

$$M = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \\ -\cos\beta & \operatorname{sen}\beta \end{bmatrix} \qquad (3.9)$$

Assim, qualquer vector da forma

$$\bar{v} = v_r\, \bar{r}_1 + v_\theta\, \bar{\theta}_1 = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

pode ser transformado à custa do produto matricial

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \\ -\cos\beta & \operatorname{sen}\beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \operatorname{sen}\beta + v \cos\beta \\ -v_r \cos\beta + v \operatorname{sen}\beta \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

ou

$$\bar{v} = (v_r \operatorname{sen}\beta + v \cos\beta)\, \bar{t}_1 + (-v_r \cos\beta + v \operatorname{sen}\beta)\, \bar{n}_1 \qquad (3.12)$$

B — Velocidade

Substituindo a relação

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dr}\, \frac{dr}{dt} \qquad (3.13)$$

* O símbolo X representa o produto externo de vectores.

nas equações das velocidades obtemos:

$$\overline{w} = \frac{dr}{dt} \left(\overline{r}_1 + r \frac{d\theta}{dr} \overline{\theta}_1\right) \tag{3.14}$$

$$\overline{u} = \omega r \overline{\theta}_1 \tag{3.15}$$

$$\overline{c} = \frac{dr}{dt} \overline{r}_1 + r \left(\frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt} + \omega\right) \overline{\theta}_1 \tag{3.16}$$

e substituindo (2.15) e (2.18)

$$\overline{w} = \overline{w}_r \left(\overline{r}_1 + \operatorname{cotg} \beta \overline{\theta}_1\right) \tag{3.17}$$

$$\overline{u} = \omega r \overline{\theta}_1 \tag{3.18}$$

$$\overline{c} = w_r \overline{r}_1 + (w_r \operatorname{cotg} \beta + \omega r) \overline{\theta}_1 \tag{3.19}$$

Aplicando a estes vectores o operador (3.9) obtemos a sua decomposição segundo as direcções paralela e normal ao escoamento:

$$\overline{w} = \operatorname{cosec} \beta \; w_r \overline{t}_1 \tag{3.20}$$

$$\overline{u} = \omega r \left(\cos \beta \overline{t}_1 + \operatorname{sen} \beta \overline{n}_1\right) \tag{3.21}$$

$$\overline{c} = (w_r \operatorname{cosec} \beta + \omega r \cos \beta) \overline{t}_1 + \omega r \operatorname{sen} \beta \overline{n}_1 \tag{3.22}$$

C — Aceleração

Derivando (3.13) em ordem ao tempo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dr^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{d\theta}{dr} \frac{d^2r}{dt^2} \tag{3.23}$$

e substituindo (3.13) e (3.23) na equação (2.4) da aceleração relativa obtemos:

$$\overline{w}' = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] \overline{r}_1 + \left[2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \frac{d\theta}{dr} + r \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \frac{d^2\theta}{dr^2} + r \frac{d\theta}{dr} \frac{d^2r}{dt^2}\right] \overline{\theta}_1 \tag{3.24}$$

ou atendendo a (2.18) e (2.19)

$$\overline{w}' = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{\operatorname{cotg}^2 \beta}{r} w_r^2\right] \overline{r}_1 + \left[w_r^2 + \left(\frac{\operatorname{cotg} \beta}{r} - \operatorname{cosec}^2 \beta \frac{d\beta}{dr}\right) + \operatorname{cotg} \beta \frac{d^2r}{dt^2}\right] \overline{\theta}_1 \tag{3.25}$$

As equações das acelerações relativa e de transporte podem também escrever-se

$$\overline{u}' = \omega^2 r \overline{r}_1 \tag{3.26}$$

$$\overline{a}_c = 2\omega w_r \left(-\operatorname{cotg} \beta \overline{r}_1 + \overline{\theta}_1\right) \tag{3.27}$$

Compondo (3.25), (3.26) e (3.27) através de (2.13) obtemos:

$$\overline{c}' = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{(\operatorname{cotg} \beta w_r + \omega r)^2}{r}\right] \overline{r}_1 + \left[\frac{w_r}{r} (w_r \operatorname{cotg} \beta + 2 \omega r) - w_r^2 \operatorname{cosec}^2 \beta \frac{d\beta}{dr} + \operatorname{cotg} \beta \frac{d^2r}{dt^2}\right] \overline{\theta}_1 \tag{3.28}$$

Aplicando novamente o operador (3.9) aos vectores (3.25), (3.26) e (3.27) obtemos as componentes das acelerações no referencial definido pelos vectores $\overline{t}_1$ e $\overline{n}_1$:

$$\overline{w}' = \operatorname{cosec} \beta \left[\left(\frac{d^2r}{dt^2} - w^2 \operatorname{cotg} \beta \frac{d\beta}{dr}\right) \overline{t}_1 + w_r^2 \left(\frac{\operatorname{cotg} \beta}{r} - \frac{d\beta}{dr}\right) \overline{n}_1\right] \tag{3.29}$$

$$\overline{u}' = \omega^2 r \left(-\operatorname{sen} \beta \overline{t}_1 + \cos \beta \overline{n}_1\right) \tag{3.30}$$

$$\overline{a}_c = 2 \omega w_r \operatorname{cosec} \beta \overline{n}_1 \tag{3.31}$$

e por adição das equações (3.29), (3.30) e (3.31)

$$\overline{c}' = \operatorname{cosec} \beta \left[\left(\frac{d^2r}{dt^2} - w_r^2 \operatorname{cotg} \beta \frac{d\beta}{dr} - \omega^2 r \operatorname{sen}^2 \beta\right) \overline{t}_1 + \left(w_r^2 \frac{\operatorname{cotg} \beta}{r} - w_r^2 \frac{d\beta}{dr} + \frac{\omega^2 r}{2} \operatorname{sen} 2 \beta + 2 \omega w_r\right) \overline{n}_1\right] \tag{3.32}$$

Os vectores velocidade aparecem-nos dependentes da velocidade radial w_r imposta pelo caudal, ângulo β característico da pá e velocidade angular e os vectores das acelerações dependem, além dos valores atrás indicados, da aceleração radial $\frac{d^2r}{dt^2}$ e da derivada $\frac{d\beta}{dr}$.

4 — ACÇÃO SOBRE AS PÁS

A — Efeitos da Aceleração

As diferentes parcelas que compõem a aceleração absoluta têm efeitos diversos na distribuição das pressões no interior da roda (figura 5).

A aceleração relativa pode ser estudada admitindo a roda parada com escoamento; o fluido, ao descrever o canal curvo entre pás muda de direcção, gerando um gradiente de pressões, dirigido para a parede côncava do canal. Os efeitos da aceleração de transporte podem ser postos em evidência admitindo a rotação da roda sem escoamento: as pás sofrem uma pressão radial, dirigida de dentro para fora, e devida à aceleração centrífuga do movimento. Finalmente, a aceleração de Coriodis, proveniente da acção directa das pás sobre o fluído, impele-o contra a pá seguinte no sentido do movimento.

A distribuição de pressões resultante da actuação simultânea das três componentes pode ser identificada com a distribuição devida à aceleração absoluta. O estudo feito conduziu à decomposição deste vector aceleração absoluta segundo as direcções paralela e perpendicular ao escoamento, admitido como unidimensional; a componente paralela influencia a variação de pressão ao longo da roda e a velocidade de escoamento, enquanto que a componente normal gera uma diferença de pressão entre as faces das pás. Este último fenómeno será estudado a seguir.

A análise do efeito de um escoamento num canal pode fazer-se através do teorema de quantidade de movimento, enunciando que uma partícula de fluído de massa dm, sofrendo uma variação instantânea de velocidade dc, processa sobre as paredes do canal uma acção dF aplicada durante o intervalo de tempo dt tal que

$$d\bar{F}\ dt = dm\ d\bar{c} \qquad (4.1)$$

ou ainda

$$d\bar{F} = \frac{dm}{dt}\, d\bar{c} \qquad (4.2)$$

Como a fracção $\frac{dm}{dt}$ representa o caudal mássico G do escoamento, obtém-se, por integração

$$\bar{F} = G\ (\bar{c}_2 - \bar{c}_1) \qquad (4.3)$$

Os valores c_2 e c_1 são tomados entre as duas secções que delimitam a zona do escoamento cuja acção pretende ser estudada. Se aplicarmos o teorema de quantidade de movimento entre as secções de entrada e saída da roda de uma turbomáquina obtemos a acção total do escoamento sobre as pás.

B — Pressão Normal

Quando se pretende calcular a diferença de pressão entre as faces de duas pás consecutivas é necessário deixar de admitir um escoamento unidimensional pois que o fluído só encontra distribuições de pressão análogas se percorrer linhas de corrente com posições similares relativamente às pás.

Nestas condições temos de admitir um escoamento bidimensional em que todas as partículas de fluído percorrem trajectárias semelhantes.

Consideremos duas pás consecutivas suficientemente próximas e afastadas angularmente de $d\theta$, e dois planos perpendiculares à superfície das pás e afastadas de uma distância elementar ds. Se as pás tiverem uma largura l, o elemento de volume dV (figura 6) limitado pelas áreas dS_n sobre a superfície da roda será:

$$dV = l\ dA \qquad (4.3)$$

ou, sendo β o ângulo que a pá forma com a direcção tangencial

$$dA = r\ dr\ d\theta \qquad (4.4)$$

As áreas dS_n e dS_t são iguais a

$$dS_n = \frac{dr}{\operatorname{sen}\beta}\ l \qquad (4.5)$$

$$dS_t = r\ d\theta\ \operatorname{sen}\beta\ l \qquad (4.6)$$

Sendo ρ a densidade do fluído em escoamento, a massa dm do elemento de volume dV será:

$$dm = \rho\ l\ r\ dr\ d\theta \qquad (4.7)$$

o admitindo dp_n a diferença d epressão entre as superfícies dS_n e dp_t a diferença de pressão entre as superfícies dS_t, as forças de pressão aplicadas ao volume elementar $dp_n\ dS_n$ e $dp_t\ dS_t$ deverão equilibrar a força de enércia. Então

$$dp_n\, dS_n\, \bar{n}_i + dp_t\ dS_t\ \bar{t}_i + dm\ \bar{c}' = 0 \qquad (4.8)$$

ou ainda, igualando as componentes homólogas

$$dp_n\, dS_n\, \bar{n}_i = -\rho\ l\ r\ dr\ d\theta\ \bar{c}'_n \qquad (4.9)$$

$$dp_t\ dS_t\ \bar{t}_i = -\rho\ l\ r\ dr\ d\theta\ \bar{c}'_t \qquad (4.10)$$

ou atendendo a (4.5) e (4.6):

$$dp_n = -\rho\ r\ \operatorname{sen}\beta\ c'_n\ d\theta \qquad (4.11)$$

$$dp_t = -\rho\ \operatorname{cosec}\beta\ c'_t\ dr \qquad (4.12)$$

A diferencial dp_t representa a variação elementar de pressão ao longo da linha de corrente, enquanto dp_n é a diferença de pressão infinitesimal entre duas pás consecutivas.

A integração das equações (4.11) e (4.12) conduz a

$$\Delta p_n = -\rho \int r\ \operatorname{sen}\beta\ c'_n\ d\theta \qquad (4.13)$$

$$\Delta p_t = -\rho \int \operatorname{cosec}\beta\ c'_t\ dr \qquad (4.14)$$

A segunda integração é imediata dentro da hipótese de unidimensionalidade admitida e será efectuada adiante.

A primeira integração exige o conhecimento do número de pás.

Um caso existe em que a integração é imediata: quando o percurso segundo o qual ela é efectuada é um arco de circunferência. Então os valores de β e r são constantes e, sendo z o número de pás da roda, o afastamento angular θ_z entre duas pás consecutivas será

$$\theta_z = \frac{2\pi}{z} \qquad (4.15)$$

Integrando então (4.11) ao longo de um arco de circunferência obtemos

$$\Delta p_n = -\frac{2\pi}{z}\ \rho\ r\ \operatorname{sen}\beta\ c'_n \qquad (4.16)$$

C — Pressão Tangencial

Para determinar a pressão tangencial ao longo de uma linha de corrente substituimos em (4.14) o valor

$$c'_t = \operatorname{cosec}\beta \left(\frac{d^2r}{dt^2} - w^2_r \operatorname{cotg}\beta \frac{d\beta}{dr} - \omega^2 r \operatorname{sen}^2\beta \right) \tag{4.17}$$

obtido por (3.32) ou:

$$dp_t = -\rho \operatorname{cosec}^2\beta \left(\frac{d^2r}{dt^2} - w_r \operatorname{cotg}\beta \frac{d\beta}{dr} - \omega^2_r \operatorname{sen}^2\beta \right) dr \tag{4.18}$$

ou, integrando

$$\Delta p_t = -\int_{r_1}^{r_2} \left(\operatorname{cosec}^2\beta \frac{d^2r}{dt^2} - w^2_r \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cosec}^2\beta \frac{d\beta}{dr} - \omega^2 r\right) dr \tag{4.19}$$

e desdobrando o integral numa soma de duas parcelas

$$\Delta p_t = -\int_{r_1}^{r_2} \left(\operatorname{cosec}^2\beta \frac{d^2r}{dt} - \frac{dr}{dt} \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cosec}^2\beta \frac{d\beta}{dt}\right) dr - \int_{r_1}^{r_2} \omega^2 r\, dr \tag{4.20}$$

A primeira parcela pode escrever-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\operatorname{cosec}^2\beta \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{dr}{dt} \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cosec}^2\beta \frac{d\beta}{dt} \right] \frac{dr}{dt}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\operatorname{cosec}^2\beta \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt} - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cosec}^2\beta \frac{d\beta}{dt} \right] dt = \frac{1}{2} \left[\operatorname{cosec}^2\beta \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right]_{t_2}^{t_1} = \frac{1}{2} \left[w^2_2 - w^2_1 \right] \tag{4.21}$$

A segunda parcela é de cálculo mais simples

$$\int_{r_1}^{r_2} \omega^2 r\, dr = \frac{1}{2} \left[\omega^2 r^2 \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{u^2_2 - u^2_1}{2} \tag{4.22}$$

Finalmente, por substituição em (4.20):

$$\Delta p_t = -\frac{\rho}{2} \left[(w^2_2 - u^2_2) - (w^2_1 - u^2_1) \right] \tag{4.23}$$

5 — ALTURA TEÓRICA DE ELEVAÇÃO

A — Equação de Bernoulli (Fluídos Incompressíveis)

A altura de elevação de uma turbomáquina define-se como sendo a energia transmitida à unidade de peso do fluído em escoamento posta em jogo sob duas formas diferentes: energia cinética e energia de pressão, correspondendo a cada uma delas uma parcela na equação da altura teórica de elevação. Designando por:

p — a pressão num ponto do escoamento

g — a aceleração de gravidade

γ — o peso específico do fluído suposto incompressível

e distinguindo pelos índices 1 e 2 dois pontos do escoamento respectivamente à entrada e à saída da roda, a altura de elevação H adquirida pelo fluído no interior da roda será:

$$H = \frac{c^2_2 - c^2_1}{2g} - \frac{p - p_1}{\gamma} \tag{5.1}$$

já conhecida como equação de Bernoulli aplicada a um escoamento sem perdas.

A energia cinética adquirida pela unidade de peso do fluído é dada pelo termo

$$E_c = \frac{c^2_2 - c^2_1}{2g}$$

O valor do acréscimo de pressão verificado no fluído durante o seu escoamento no interior da roda pode determinar-se a partir da composição de dois movimentos estacionários e adicionando algebricamente o aumento de pressão devido cada um deles isoladamente, aplicando o princípio de sobreposição dos estados de equilíbrio.

Designando por $p'_2 - p'_1$ o acréscimo de pressão devido ao movimento de rotação da roda sem escoamento e por $p''_2 - p''_1$ o acréscimo de pressão criado pelo escoamento do fluído admitindo a roda parada, temos:

$$p_2 - p_1 = (p'_2 - p'_1) + (p''_2 - p''_1) \tag{5.3}$$

Pela definição dos dois efeitos é fácil de prever que a primeira parcela de (5.3) dependerá da velocidade de transporte enquanto que a segunda será função da velocidade relativa do escoamento ou, de outra forma, a primeira depende da velocidade de rotação da roda e a segunda está relacionada com a curvatura das pás. Faremos a seguir uma análise de cada uma destas parcelas.

B — Rotação sem Escoamento

Admitamos que uma roda de uma turbomáquina radial roda sem escoamento e consideremos no seu interior duas superfícies cilíndricas coaxiais distanciadas de dr. Designemos por dS_1 e dS_2 duas áreas elementares definidas sobre as superfícies cilíndricas por um diedro de aresta coincidente com o eixo e amplitude $d\theta$, e representemos por dV o volume infinitesimal limitado por aquelas duas áreas (figura 7). Então, para uma roda de largura l:

$$dS_1 = l\ r\ d\theta \tag{5.4}$$

$$dS_2 = l\ (r + dr)\ d\theta \tag{5.5}$$

$$dV = l\ r\ d\theta\ dr \tag{5.6}$$

A força centrífuga F_c a que está sujeito o elemento dV deverá ser:

$$F_c = \rho\ dv\ \omega^2\ r \tag{5.7}$$

em que ρ é a massa específica do fluído.

A força devida à pressão infinitesimal dp' deve equilibrar a força centrífuga originada pelo movimento de rotação:

$$\rho\ dV\ \omega^2\ r = dp'\ dS_2 \tag{5.8}$$

ou, por substituição de (5.4), (5.5) e (5.6) e desprezando infinitésimos de ordem superior

$$d\ (p'r) = \rho\ \omega^2\ r\ dr = \rho \frac{u^2}{r}\ dr \tag{5.9}$$

Como

$$\gamma = \rho\ g \tag{5.10}$$

integrando (5.9) entre os pontos 1 e 2 obtemos:

$$p'_2 - p'_1 = \frac{\gamma}{2\ g}\ \omega^2\ (r^2_2 - r^2) \tag{5.11}$$

ou ainda, por (2.8):

$$p'_2 - p'_1 = \frac{\gamma}{2\ g}\ (u^2_2 - u^2_1) \tag{5.12}$$

C — Vórtices

Quando um escoamento percorre um canal curvo a variação direccional da quantidade de movimento do fluído provoca uma acção sobre a conduta; este efeito é a consequência do gradiente interno de pressões criado pela presença da componente centrífuga da aceleração. Supondo um escoamento sem perdas, o princípio da conservação de energia permite afirmar que, não havendo trocas energéticas do fluído com o meio, a velocidade das partículas sujeitas a maior pressão terá que diminuir a fim de que a queda de energia cinética E_c conpense o aumento de energia de pressão E_p sofrida pela unidade de peso do fluído, ou:

$$E_c + E_p = \text{Constante} \tag{5.13}$$

Admitiremos que se o escoamento se der numa conduta de curvatura circular (figura 8) as linhas de corrente são arcos de circunferência*. Designando por u_1 a velocidade do fluído à entrada da curva e por u_2 a velocidade sobre um arco da linha de corrente à distância r do centro, a condição (5.9) permite escrever

$$dE_p = \frac{dp}{\gamma} = \frac{1}{g}\ \frac{u^2}{r}\ dr \tag{5.14}$$

* Esta hipótese não é rigorosa para um fluido real

A diferenciação da expressão (5.2) da energia cinética conduz a

$$dE_p = \frac{u\ du}{g} \tag{5.15}$$

Diferenciando (5.13)

$$dE_c + dE_p = 0 \tag{5.16}$$

e substituindo (5.14) e (5.15)

$$u\ du + \frac{u^2}{r}\ dr = 0 \tag{5.17}$$

ou, integrando entre dois pontos

$$\ln \frac{u^2}{u_1} + \ln \frac{r_2}{r_1} = 0 \tag{5.18}$$

podendo inferir-se que

$$u\ r = \text{Constante} \tag{5.19}$$

Um escoamento com estas características toma o nome dos vórtice e, quando verificado numa turbomáquina, traduz a ausência de energia comunicada pelas pás ao fluído.

Para escoamentos de curvatura não circular é legítima a determinação do raio da circunfrerência osculatriz correspondente a um pequeno troço da linha de corrente a fim de determinar, por aproximação, a distribuição de pressões local.

D — Escoamento sem Rotação

Vamos sulpôr que o escoamento se dá encontrando-se a roda da turbomáquina parada. Uma vez que não há energia fornecida ou cedida ao escoamento a equação de Bernoulli toma a forma

$$\frac{p''_2 - p''_1}{\gamma} + \frac{w^2_2 - w^2_1}{2g} = 0 \tag{5.20}$$

ou ainda

$$p''_2 - p''_1 = -\frac{\gamma}{2g}\ (w^2_2 - w^2_1) \tag{5.21}$$

E — Rotação com Escoamento

O valor de $p_2 - p_1$ é obtido a partir das relações (5.3) (5.12) e (5.21):

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{2g} \left[(u^2_2 - u^2_1) - (w^2_2 - w^2_1) \right] \tag{5.22}$$

e substituindo esta expressão em (5.1) obtemos

$$H = \frac{1}{2g}\ (c_2^2 - c^2_1) + (u^2_2 - u^2_1) - (w^2_2 - w^2_1) \tag{5.23}$$

A análise do triângulo de velocidades (figura 2) permite escrever

$$c^2 + u^2 - w^2 = (c_r^2 + c_\theta^2) + (c_\theta + w_\theta)^2 - (w_r + w_\theta)^2 \tag{5.24}$$

ou, simplificando

$$c^2 + u^2 - w^2 = 2\ (c_\theta + w_\theta)\ c_\theta \tag{5.25}$$

ou ainda

$$c^2 + u^2 - w^2 = 2\ u\ c_\theta \tag{5.26}$$

Substituindo esta expressão na equação (5.23) obtemos ainda

$$H = \frac{1}{g}(u^2\ c_{\theta_2} - u_1\ c_{\theta_1}) \tag{5.27}$$

expressão simplificada da altura teórica de elevação de uma turbomáquina radial.

O produto $u\ c_\theta$ pode ainda ser desenvolvido:

$$u\ c_\theta = u\ (u - w_\theta) = u\ (u - w_r\ \text{cotg}\ \beta) \tag{5.28}$$

donde, por substituição em (5.27):

$$H = \frac{1}{g}\left[(u_2^2 - u_1^2) + (u_2\ w_{r_2}\ \text{cotg}\ \beta_2 - u_1\ w_{r_1}\ \text{cotg}\ \beta_1)\right] \tag{5.29}$$

6 — BINÁRIO E POTÊNCIA

A — Binário Resistente

Idealizemos um escoamento entre duas pás muito próximas de uma turbobomba radial em que 1 e 2 são, respectivamente, dois pontos à entrada e à saída do tubo de corrente definido pelas pás. Aplicando o teorema do momento angular em cada um dos pontos referidos, obtemos:

$$\Delta \bar{M}_1 = \frac{d}{dt}(\bar{r}_1 \times m\ \bar{c}_1) \tag{6.1}$$

$$\Delta \bar{M}_2 = \frac{d}{dt}(\bar{r}_2 \times m\ \bar{c}_2) \tag{6.2}$$

em que m é a massa do fluido contido no tubo de corrente. No ponto 1 o fluido começa a ser arrastado pela roda originando um acréscimo de binário resistente M_1. Por convenção

$$\Delta M_1 > 0 \tag{6.3}$$

No ponto 2 o fluido deixa de sofrer a acção da roda dando-se uma diminuição de binário resistente M_2, implicando

$$\Delta M_2 < 0 \tag{6.4}$$

O binário resistente M será então

$$M = \Delta M_1 - \Delta M_2 \tag{6.5}$$

As equações (6.1) e (6.2) foram obtidas para pontos definidos do escoamento, verificando-se aí que

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = 0\ ; \tag{6.6}$$

admitindo o escoamento estacionário, pode também escrever-se

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = 0 \tag{6.7}$$

concluindo-se então que

$$\Delta \bar{M} = \frac{dm}{dt}\ \bar{r} \times \bar{c} \tag{6.8}$$

Decompondo o vector

$$\bar{c} = \bar{c}_r + \bar{c}_\theta \tag{6.9}$$

obtemos, por substituição

$$\Delta \bar{M} = G\ r\ c_\theta\ \bar{z}_1 \tag{6.10}$$

em que

$\bar{z}_1$ é o versor paralelo ao eixo da máquina

G é o caudal mássico

Retomando a equação (6.5) podemos escrever, finalmente:

$$M = G\ (r_2\ c_{\theta 2} - r_1\ c_{\theta 1}) \tag{6.11}$$

B — Bombas e Turbinas

Consoante uma máquina funciona fornecendo ou recebendo energia assim o binário é motor ou resistente, tomando respectivamente o sinal positivo ou negativo, por convenção. No caso particular das turbomáquinas temos:

$M > 0$ para bombas

$M < 0$ para turbinas

ou, recorrendo à equação (6.11)

$r_2\ c_{\theta 2} > r_1\ c_{\theta 1}$ para as turbinas

$r_2\ c_{\theta 2} < r_1\ c_{\theta 1}$ para as bombas

É, assim, fácil de concluir que a solução construtiva mais provável indica

$r_2 > r_1$ para as bombas

$r_2 < r_1$ para as turbinas

Por esta razão nas turbomáquinas radiais, salvo raras excepções, as linhas de corrente das bombas são descritas do centro para a periferia da roda enquanto que nas turbinas o sentido do escoamento é inverso.

NOTA: A equação (5.22) já tinha obtido por outra via em (4.31)

C — Potência

Comparando as expressões (5.27) e (6.11) concluímos que, em valor absoluto, a potência P absorvida ou cedida pela máquina é:

$$P = M\,\omega = g\ G\ H \qquad (6.12)$$

Consoante o tipo da turbomáquina assim

$P > 0$ para as bombas

$P < 0$ para as turbinas

7 — ESCOAMENTOS RADIAIS INCOMPRESSÍVEIS

A — Velocidade e Aceleração

Sendo Q o caudal de fluido, suposto incompressível, escoado por uma turbomáquina radial, e representando por l a largura útil da roda, temos que

$$Q = 2\,\pi\,r\,l\,\frac{dr}{dt} \qquad (7.1)$$

Admitindo um caudal invariável, podemos introduzir a constante

$$K = \frac{Q}{2\,\pi\,l} \qquad (7.2)$$

e portanto

$$\frac{dr}{dt} = \frac{K}{r} \qquad (7.3)$$

Derivando (7.3) em ordem ao tempo obtemos

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{w_r^2}{r} \qquad (7.4)$$

Substituindo (7.4) nas equações das acelerações (3.25) e (3.28) obtemos:

$$\bar{w}' = -\frac{w^2}{r}\left(\bar{r}_1 + r\,\frac{d\beta}{dr}\,\bar{\theta}_1\right) \qquad (7.5)$$

$$\bar{c}' = -\frac{1}{r}\left[c^2\,\bar{r}_1 + \left(r\,w^2\,\frac{d\beta}{dr} - 2\,u\,w_r\right)\bar{\theta}_1\right] \qquad (7.6)$$

A decomposição destes vectores segundo as direcções tangente e normal às linhas de corrente pode fazer-se utilizando o operador (3.9)

$$\bar{w}' = -\frac{w^2}{r}\left[\left(\operatorname{sen}\beta + r\,\cos\beta\,\frac{d\beta}{dr}\right)\bar{t}_1 + \left(r\,\operatorname{sen}\beta\,\frac{d\beta}{dr} - \cos\beta\right)\bar{n}_1\right] \qquad (7.7)$$

$$\bar{c}' = -\frac{\operatorname{sen}\beta}{r}\left[\left(c^2 + r\,\operatorname{cotg}\beta\,w^2\,\frac{d\beta}{dr} - 2\,u\,w_r\,\operatorname{cotg}\beta\right)\bar{t}_1 + \left(r\,w^2\,\frac{d\beta}{dr} - 2\,u\,w_r - c^2\,\operatorname{cotg}\beta\right)\bar{n}_1\right] \qquad (7.8)$$

O ângulo α, definido pelos vectores c e u, pode calcular-se recorrendo a (2.16)

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{u}{w_r} + \operatorname{cotg}\beta \qquad (7.9)$$

B — Pressão sobre as Pás

Admitindo um escoamento unidensional com um número de pás suficientemente grande, a diferença de pressão entre as duas faces de uma pá num ponto é igual à diferença de pressão, no mesmo canal, entre duas pás consecutivas em pontos à mesma distância do eixo.

Substituindo em (4.16) a componente normal da aceleração absoluta obtida em (7.8)

$$\Delta p_n = \frac{2\,\pi}{z}\,\varrho\,\operatorname{sen}^2\beta\left(r\,w^2\,\frac{d\beta}{dr} - 2\,u\,w_r - c^2\,\operatorname{cotg}\beta\right) \qquad (7.10)$$

Efectuando a integração (4.14) segundo o mesmo caminho (r constante) temos que

$$\Delta p_t = 0 \qquad (7.11)$$

ou seja a pressão tangencial mantém-se constante, e as pressões num ponto da parede de uma pá são

$$p_f \text{ e } p_f + \Delta p_n \qquad (7.12)$$

C — Altura Teórica de Elevação

O desenvolvimento da equação (5.29) conduz a

$$H = \frac{1}{g}\left[u_2^2 - u_1^2 + \omega\,K\,(\operatorname{cotg}\beta_2 - \operatorname{cotg}\beta_1)\right] \qquad (7.13)$$

No caso mais favorável de entrada (ausência de pré-rotação) o ângulo dos vectores $\bar{c}$ e $\bar{u}$ deverão ser $\alpha = \pi/2$ donde

$$\operatorname{cotg}\beta_1 = -\frac{u_1}{c_1} \qquad (7.14)$$

Como nestas condições a velocidade absoluta só tem componente radial é $c_1 = w_{r_1}$ e por substituição em (7.13):

$$H = \frac{1}{g}\left(u_2^2 + u_2\,w_{r_2}\,\operatorname{cotg}\beta_2\right) \qquad (7.15)$$

Introduzindo a constante (7.1) na equação anterior podemos escrever:

$$H = \frac{u_2^2}{g} + \frac{\omega}{2\,\pi\,l}\,\operatorname{cotg}\beta_2\,Q \qquad (7.16)$$

equação que se designa por característica teórica de uma turbomáquina com entrada radial (figura 10).

8 — ESCOAMENTO A ENERGIA CONSTANTE

A — Características

Designamos por escoamento neutro aquele em que a energia total do fluído se mantém invariável durante todo o percurso na roda. Então, a energia posta em jogo pela máquina é nula, assim como a potência e o binário.

O anulamento da expressão (5.27) obriga a que

$$u\ c_\theta = u_1\ c_{\theta_1} \tag{8.1}$$

ou, numa outra forma

$$r\ c\ \cos\alpha = r_1\ c_1\ \cos\alpha_1 \tag{8.2}$$

As relações entre os elementos geométricos do triângulo de velocidades (figura 2) permitem escrever

$$c\ \cos\alpha = \sqrt{c^2 - \frac{K^2}{r^2}} \tag{8.3}$$

e introduzindo esta relação em (8.2)

$$r\sqrt{c^2 - \frac{K^2}{r^2}} = r_1\sqrt{c_1^2 - \frac{K^2}{r_1^2}} \tag{8.4}$$

ou simplificando

$$c\ r = c_1\ r_1 \tag{8.5}$$

Comparando as equações (8.2) e (8.5) verificamos que $\alpha = \alpha_1$, ou seja, o ângulo α mantém-se constante ao longo da linha de corrente. Admitamos então

$$\alpha = \alpha_k \tag{8.6}$$

Quando $w = 0$ então $\bar{c} = \bar{u}$, $\alpha = 0$ e o movimento degenera em vórtice, não havendo escoamento radial.

Quando $\alpha = \pi/2$ vem $\bar{c} = \bar{c}_r$, podendo escrever-se

$$c^2 = u^2 + w^2 \tag{8.7}$$

e o fluído efectua um escoamento puramente radial ou fonte em que o movimento da pá não intefere.

Os vortices e as fontes serão analizados como casos particulares dos escoamentos a energia constante.

B — Velocidade e Aceleração

Uma vez que o ângulo α é constante ao longo do escoamento a relação (7.9) permite-nos escrever

$$\text{cotg}\,\beta = \text{cotg}\,\alpha_K - \frac{u}{w_r} \tag{8.8}$$

ou por (7.3)

$$\text{cotg}\,\beta = \text{cotg}\,\alpha_K - \frac{\omega}{K}\,r^2 \tag{8.9}$$

Derivando esta equação em ordem a r e atendendo ainda a (7.3) obtemos

$$\frac{d\beta}{dr} = 2\ \frac{u}{w_r}\ \frac{\text{sen}^2\beta}{r} \tag{8.10}$$

Introduzindo as relações (8.8) e (8.12) em (7.5) e (7.6) podemos escrever:

$$\bar{w}' = -\frac{1}{r}\left(w^2\,\bar{r}_1 + 2\ u\ w_r\,\bar{\theta}_1\right) \tag{8.11}$$

$$\bar{c}' = -\frac{w^2_r}{r}\,\text{cosec}^2\,\alpha_K\,\bar{r}_1 \tag{8.12}$$

A aceleração absoluta apresenta apenas componente radial, condição esta que permite confirmar o anulamento do binário e potência em jogo na roda, pois que a resultante das forças aplicadas sobre um elemento do fluído deverá ter a mesma direcção que $\bar{c}'$.

Particularizando temos, para o caso do vórtice

$$w' = 0 \tag{8.13}$$

$$\bar{c}' = \bar{u}' \tag{8.14}$$

e para o caso da fonte, atendendo a (8.7)

$$\bar{w}' = -\frac{1}{r}\left(c^2\,\bar{r}_1 + 2\ u\ w_r\,\bar{\theta}_1\right) \tag{8.15}$$

$$\bar{c}' = -\frac{w^2_r}{r}\,\bar{r}_1 \tag{8.16}$$

C — Linhas de Corrente e Pressão sobre as Pás

As equações (2.17) e (8.9) permitem escrever

$$r\,\frac{d\theta}{dr} = \text{cotg}\,\alpha_k - \frac{\omega}{K}\,r^2 \tag{8.17}$$

ou, separando variáveis e integrando, admitindo que para $r = r_1$ é $\theta = 0$

$$\theta = \text{cotg}\,\alpha_K\,\ln\frac{r}{r_1} - \frac{\omega}{2K}\left(r^2 - r_1^2\right) \tag{8.18}$$

ou ainda

$$\theta = \text{cotg}\,\alpha_K\,\ln\frac{r}{r_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w_r} - \frac{u_1}{w_{r1}}\right) \tag{8.19}$$

equação que caracteriza as linhas de corrente.

Para um vortice, como $\alpha_K = 0$ é necessário que $r = r_1$ para θ ter um valor finito, concluindo-se então que para este caso a equação das linhas de corrente será tal que

$$r = \text{constante} \tag{8.20}$$

Para uma fonte é $\alpha_K = \pi/2$ e então

$$\theta = -\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w_r} - \frac{u_1}{w_{r1}}\right) \tag{8.21}$$

A pressão sobre as pás da máquina pode determinar-se substituindo a relação (8.10) em (7.10):

$$\Delta p_n = -\frac{2\pi}{z}\,\rho\ \text{sen}\,\beta\ \cos\beta\ c^2 \tag{8.22}$$

9 — ESCOAMENTOS COM AUMENTO DE ENERGIA

A — Velocidade Relativa Constante

Admitindo que a velocidade relativa ao longo do escoamento se mantém constante

$$w = w_K \tag{9.1}$$

vem

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{w_r}{w} = \frac{K}{w_K r} \tag{9.2}$$

Derivando esta expressão em ordem a r podemos escrever

$$\frac{d\beta}{dr} = -\frac{\operatorname{tg}\beta}{r} \tag{9.3}$$

e substituindo em (7.5) e (7.6)

$$\overline{w'} = -\frac{w^2_K}{r}(\overline{r_1} - \operatorname{tg}\beta\ \overline{\theta_1}) \tag{9.4}$$

$$\overline{c'} = -\frac{1}{r}\left[c^2\ \overline{r_1} - (2\ u\ w_r + w^2_K \operatorname{tg}\beta)\ \overline{\theta_1}\right] \tag{9.5}$$

Decompondo $\overline{w'}$ segundo as direcções tangente e normal às linhas de corrente recorrendo à equação (7.7) verificamos que

$$\overline{w'} = \frac{w^2_K}{r}\sec\beta\ \overline{n_1} \tag{9.6}$$

concluindo-se que a aceleração relativa é normal, em cada ponto, à linha de corrente.

A equação (2.18) pode escrever-se

$$\frac{d\theta}{d\beta} = \frac{\operatorname{cotg}\beta}{r}\frac{dr}{d\beta} \tag{9.7}$$

Substituindo nesta equação o valor obtido em (9.3) vem

$$\frac{d\theta}{d\beta} = -\operatorname{cotg}^2\beta \tag{9.8}$$

obtendo-se, por integração, a equação das linhas de corrente

$$\theta = (\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\beta_1) + (\beta - \beta_1) \tag{9.9}$$

O perímetro de um segmento de uma linha de corrente, limitada por dois pontos à distância r e r_1 do centro da roda, obtém-se substituindo em (2.30) o valor (9.2) e integrando

$$s = \frac{w_K}{2K}(r^2 - r^2_1) \tag{9.10}$$

A pressão sobre as pás determina-se introduzindo em (7.10) o valor obtido em (9.3)

$$\Delta p_{II} = -\frac{2\pi}{z}\rho\ \operatorname{sen}^2\beta\ (c^2\ \operatorname{cotg}\beta + 2\ u\ w_r + w^2_K \operatorname{tg}\beta) \tag{9.11}$$

B — Inclinação Radial Constante

Partindo da equação (2.17) e admitindo constante a inclinação radial, sendo

$$\beta = \beta_K \tag{9.12}$$

obtemos imediatamente

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\operatorname{cotg}\beta_K}{r} \tag{9.13}$$

Integrando esta equação entre um ponto de raio r_1 e um ponto genérico de raio r, admitindo que para $r = r_1$ é $\theta = 0$, obtemos a equação das linhas de corrente:

$$\theta = \operatorname{cotg}\beta_K \ln\frac{r}{r_1} \tag{9.14}$$

O perímetro de uma linha de corrente entre r e r_1 pode ser determinado por (2.30) que, depois de integrada conduz a

$$s = \operatorname{cosec}\beta_K\ (r - r_1) \tag{9.15}$$

Um caso particular deste é aquele em que $\beta = \pi/2$, caso das pás radiais planas. Então a equação das linhas de corrente transforma-se em

$$\theta = \text{Constante} \tag{9.16}$$

e o seu comprimento

$$s = r - r_1 \tag{9.17}$$

Pelo facto de ser

$$\frac{d\beta}{dr} = 0 \tag{9.18}$$

as equações (7.5) e (7.6) podem apresentar a forma

$$\overline{w'} = -\frac{w^2}{r}\overline{r_1} \tag{9.19}$$

$$\overline{c'} = -\frac{1}{r}(c^2\ \overline{r_1} - 2\ u\ w_r\ \overline{\theta_1}) \tag{9.20}$$

Para as pás radiais planas estas equações transformam-se em:

$$\overline{w'} = -\frac{w^2_r}{r}\overline{r_1} \tag{9.21}$$

$$\overline{c'} = -\frac{w^2_r}{r}(\overline{r_1} - 2\frac{u}{w_r}\overline{\theta_1}) \tag{9.22}$$

O cálculo da pressão sobre as pás faz-se à custa da equação (7.12) que pode escrever-se, atendendo a (7.10):

$$\Delta p_{II} = -\frac{2\pi}{z}\rho\ \operatorname{sen}^2\beta_K (c^2\ \operatorname{cotg}\beta_K + 2\ u\ w_r) \tag{9.23}$$

8 — ESCOAMENTO A ENERGIA CONSTANTE

A — Características

Designamos por escoamento neutro aquele em que a energia total do fluído se mantém invariável durante todo o percurso na roda. Então, a energia posta em jogo pela máquina é nula, assim como a potência e o binário.

O anulamento da expressão (5.27) obriga a que

$$u\ c_\theta = u_1\ c_{\theta_1} \tag{8.1}$$

ou, numa outra forma

$$r\ c\ \cos\alpha = r_1\ c_1\ \cos\alpha_1 \tag{8.2}$$

As relações entre os elementos geométricos do triângulo de velocidades (figura 2) permitem escrever

$$c\ \cos\alpha = \sqrt{c^2 - \frac{K^2}{r^2}} \tag{8.3}$$

e introduzindo esta relação em (8.2)

$$r\sqrt{c^2 - \frac{K^2}{r^2}} = r_1\sqrt{c_1^2 - \frac{K^2}{r_1^2}} \tag{8.4}$$

ou simplificando

$$c\ r = c_1\ r_1 \tag{8.5}$$

Comparando as equações (8.2) e (8.5) verificamos que $\alpha = \alpha_1$, ou seja, o ângulo α mantém-se constante ao longo da linha de corrente. Admitamos então

$$\alpha = \alpha_k \tag{8.6}$$

Quando $w = 0$ então $\bar{c} = \bar{u}$, $\alpha = 0$ e o movimento degenera em vórtice, não havendo escoamento radial.

Quando $\alpha = \pi/2$ vem $\bar{c} = \bar{c}_r$, podendo escrever-se

$$c^2 = u^2 + w^2 \tag{8.7}$$

e o fluído efectua um escoamento puramente radial ou fonte em que o movimento da pá não intefere.

Os vortices e as fontes serão analizados como casos particulares dos escoamentos a energia constante.

B — Velocidade e Aceleração

Uma vez que o ângulo α é constante ao longo do escoamento a relação (7.9) permite-nos escrever

$$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha_K - \frac{u}{w_r} \tag{8.8}$$

ou por (7.3)

$$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha_K - \frac{\omega}{K}r^2 \tag{8.9}$$

Derivando esta equação em ordem a r e atendendo ainda a (7.3) obtemos

$$\frac{d\beta}{dr} = 2\ \frac{u}{w_r}\ \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{r} \tag{8.10}$$

Introduzindo as relações (8.8) e (8.12) em (7.5) e (7.6) podemos escrever:

$$\bar{w}' = -\frac{1}{r}\left(w^2\ \bar{r}_1 + 2\ u\ w_r\ \bar{\theta}_1\right) \tag{8.11}$$

$$\bar{c}' = -\frac{w^2_r}{r}\operatorname{cosec}^2\alpha_K\ \bar{r}_1 \tag{8.12}$$

A aceleração absoluta apresenta apenas componente radial, condição esta que permite confirmar o anulamento do binário e potência em jogo na roda, pois que a resultante das forças aplicadas sobre um elemento do fluído deverá ter a mesma direcção que $\bar{c}'$.

Particularizando temos, para o caso do vórtice

$$w' = 0 \tag{8.13}$$

$$\bar{c}' = \bar{u}' \tag{8.14}$$

e para o caso da fonte, atendendo a (8.7)

$$\bar{w}' = -\frac{1}{r}\left(c^2\ \bar{r}_1 + 2\ u\ w_r\ \bar{\theta}_1\right) \tag{8.15}$$

$$\bar{c}' = -\frac{w^2_r}{r}\ \bar{r}_1 \tag{8.16}$$

C — Linhas de Corrente e Pressão sobre as Pás

As equações (2.17) e (8.9) permitem escrever

$$r\ \frac{d\theta}{dr} = \operatorname{cotg}\alpha_k - \frac{\omega}{K}r^2 \tag{8.17}$$

ou, separando variáveis e integrando, admitindo que para $r = r_1$ é $\theta = 0$

$$\theta = \operatorname{cotg}\alpha_K \ln\frac{r}{r_1} - \frac{\omega}{2K}\left(r^2 - r_1^2\right) \tag{8.18}$$

ou ainda

$$\theta = \operatorname{cotg}\alpha_K \ln\frac{r}{r_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w_r} - \frac{u_1}{w_{r1}}\right) \tag{8.19}$$

equação que caracteriza as linhas de corrente.

Para um vortice, como $\alpha_K = 0$ é necessário que $r = r_1$ para θ ter um valor finito, concluindo-se então que para este caso a equação das linhas de corrente será tal que

$$r = \text{constante} \tag{8.20}$$

Para uma fonte é $\alpha_K = \pi/2$ e então

$$\theta = -\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w_r} - \frac{u_1}{w_{r1}}\right) \tag{8.21}$$

A pressão sobre as pás da máquina pode determinar-se substituindo a relação (8.10) em (7.10):

$$\Delta p_n = -\frac{2\pi}{z}\rho\ \operatorname{sen}\beta\ \cos\beta\ c^2 \tag{8.22}$$

9 — ESCOAMENTOS COM AUMENTO DE ENERGIA

A — Velocidade Relativa Constante

Admitindo que a velocidade relativa ao longo do escoamento se mantém constante

$$w = w_K \tag{9.1}$$

vem

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{w_r}{w} = \frac{K}{w_K r} \tag{9.2}$$

Derivando esta expressão em ordem a r podemos escrever

$$\frac{d\beta}{dr} = -\frac{\operatorname{tg}\beta}{r} \tag{9.3}$$

e substituindo em (7.5) e (7.6)

$$\overline{w'} = -\frac{w^2_K}{r}(\overline{r_1} - \operatorname{tg}\beta\ \overline{\theta_1}) \tag{9.4}$$

$$\overline{c'} = -\frac{1}{r}\left[c^2\ \overline{r_1} - (2\ u\ w_r + w^2_K \operatorname{tg}\beta)\ \overline{\theta_1}\right] \tag{9.5}$$

Decompondo $\overline{w'}$ segundo as direcções tangente e normal às linhas de corrente recorrendo à equação (7.7) verificamos que

$$\overline{w'} = \frac{w^2_K}{r}\sec\beta\ \overline{n_1} \tag{9.6}$$

concluindo-se que a aceleração relativa é normal, em cada ponto, à linha de corrente.

A equação (2.18) pode escrever-se

$$\frac{d\theta}{d\beta} = \frac{\operatorname{cotg}\beta}{r}\frac{dr}{d\beta} \tag{9.7}$$

Substituindo nesta equação o valor obtido em (9.3) vem

$$\frac{d\theta}{d\beta} = -\operatorname{cotg}^2\beta \tag{9.8}$$

obtendo-se, por integração, a equação das linhas de corrente

$$\theta = (\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\beta_1) + (\beta - \beta_1) \tag{9.9}$$

O perímetro de um segmento de uma linha de corrente, limitada por dois pontos à distância r e r_1 do centro da roda, obtém-se substituindo em (2.30) o valor (9.2) e integrando

$$s = \frac{w_K}{2K}(r^2 - r^2_1) \tag{9.10}$$

A pressão sobre as pás determina-se introduzindo em (7.10) o valor obtido em (9.3)

$$\Delta p_{II} = -\frac{2\pi}{z}\rho\ \operatorname{sen}^2\beta\ (c^2\ \operatorname{cotg}\beta + 2\ u\ w_r + w^2_K \operatorname{tg}\beta) \tag{9.11}$$

B — Inclinação Radial Constante

Partindo da equação (2.17) e admitindo constante a inclinação radial, sendo

$$\beta = \beta_K \tag{9.12}$$

obtemos imediatamente

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\operatorname{cotg}\beta_K}{r} \tag{9.13}$$

Integrando esta equação entre um ponto de raio r_1 e um ponto genérico de raio r, admitindo que para $r = r_1$ é $\theta = 0$, obtemos a equação das linhas de corrente:

$$\theta = \operatorname{cotg}\beta_K \ln\frac{r}{r_1} \tag{9.14}$$

O perímetro de uma linha de corrente entre r e r_1 pode ser determinado por (2.30) que, depois de integrada conduz a

$$s = \operatorname{cosec}\beta_K\ (r - r_1) \tag{9.15}$$

Um caso particular deste é aquele em que $\beta = \pi/2$, caso das pás radiais planas. Então a equação das linhas de corrente transforma-se em

$$\theta = \text{Constante} \tag{9.16}$$

e o seu comprimento

$$s = r - r_1 \tag{9.17}$$

Pelo facto de ser

$$\frac{d\beta}{dr} = 0 \tag{9.18}$$

as equações (7.5) e (7.6) podem apresentar a forma

$$\overline{w'} = -\frac{w^2}{r}\overline{r_1} \tag{9.19}$$

$$\overline{c'} = -\frac{1}{r}(c^2\ \overline{r_1} - 2\ u\ w_r\ \overline{\theta_1}) \tag{9.20}$$

Para as pás radiais planas estas equações transformam-se em:

$$\overline{w'} = -\frac{w^2_r}{r}\overline{r_1} \tag{9.21}$$

$$\overline{c'} = -\frac{w^2_r}{r}(\overline{r_1} - 2\frac{u}{w_r}\overline{\theta_1}) \tag{9.22}$$

O cálculo da pressão sobre as pás faz-se à custa da equação (7.12) que pode escrever-se, atendendo a (7.10):

$$\Delta p_{II} = -\frac{2\pi}{z}\rho\ \operatorname{sen}^2\beta_K (c^2\ \operatorname{cotg}\beta_K + 2\ u\ w_r) \tag{9.23}$$

C — Pá Plana

Admitamos agora uma pá plana, figura 12. Sejam P e P' dois pontos muito próximos sobre a pá, para os quais o ângulo de inclinação tangencial da pá toma, respectivamente, os valores β e $\beta + d\beta$, definindo com o centro O da roda um ângulo

$$\sphericalangle P'OP = d\theta$$

Então, pela figura, obtemos

$$\beta + d\beta = \beta + d\theta \qquad (9.24)$$

donde

$$d\beta = d\theta \qquad (9.25)$$

ou integrando e admitindo $\theta_1 = 0$

$$\theta = \beta - \beta_1 \qquad (9.26)$$

Esta relação, substituída em (2.17) permite escrever

$$\frac{d\beta}{dr} = \frac{\cot g\, \beta}{r} \qquad (9.27)$$

ou integrando entre r e r_1

$$\ln \frac{r}{r_1} = - \ln \frac{\cos \beta}{\cos \beta_1} \qquad (9.28)$$

ou, finalmente

$$r \cos \beta = r_1 \cos \beta_1 \qquad (9.29)$$

Relacionando o ângulo β com θ substituindo (9.29) em (9.26) obtemos a equação das linhas de corrente

$$\theta = \text{arc cos} \left(\frac{r_1}{r} \cos \beta_1 \right) - \beta_1 \qquad (9.30)$$

Substituindo (9.27) em (2.30) e integrando obtemos

$$s = r_1 \cos \beta_1 \int_{r_1}^{r} \sec^2 \beta \; d\beta \qquad (9.31)$$

ou

$$s = r_1 \cos \beta_1 \; (\text{tg}\beta - \text{tg}\beta_1) \qquad (9.32)$$

equação que nos permite obter o perímetro de um segmento de uma linha de corrente.

Substituindo (9.31) em (7.5) e (7.6) obtemos as equações das acelerações:

$$\bar{w}' = - \frac{w^2}{r} (\bar{r}_1 + \cot g\, \beta \; \bar{\theta}_1) \qquad (9.33)$$

$$\bar{c}' = - \frac{1}{r} \left[\bar{c}^2 \; \bar{r}_1 + (w^2 \cot g\, \beta - 2 \; u \; w_r) \; \bar{\theta}_1 \right] \qquad (9.34)$$

A aceleração relativa é, neste caso, paralela à velocidade relativa.

Substituindo (9.31) em (7.12) obtemos

$$\Delta p_{fl} = \frac{2\pi}{z} \rho \left(\frac{u^2}{2} \text{ sen } 2\beta + 2u \; w_r \right) \qquad (9.35)$$

expressão que nos dá a diferença de pressão entre dois pontos da mesma equipotencial sobre duas pás consecutivas próximas.

D — Exemplo Numérico

A fim de comparar as características mecânicas de diferentes tipos de escoamento vamos admitir que pretendemos, com uma turbobomba, vencer uma altura de elevação de 20 m com um caudal de água de 25 l/s. As dimensões, admitidas para o impulsor por comparação com outras do mesmo tipo, [Stepanoff, Centrifugal and Axial Flow Pumps, Wiley 1957] são as seguintes:

Escoamento radial

Entrada normal, sem choque

Raio exterior do impulso — 12,5 cm

Raio interior do impulso — 5 cm

Largura dos canais — 2 cm

O número de pás admitido, a fim de poder manter as hipóteses de unidimensionalidade, foi bastante superior àquilo que é habitual em máquinas deste tipo.

Número de pás — 60.

As velocidades à entrada são completamente definidas à custa destes valores, assim:

Velocidades

$u_1 = 7{,}85$ m/s

$c_1 = w_{r_1} = 3{,}98$ m/s

$w_1 = 8{,}80$ m/s

Algumas das velocidades podem ainda ser conhecidas à saída

$u_2 = 19{,}62$ m/s

$w_{r_2} = 1{,}59$ m/s

O ângulo da pá à entrada é

$\beta_1 = 26{,}9°$

Outras constantes necessárias do cálculo são ainda

$\omega = 157$ rad/s

$k = 0{,}199$ m²/s

Os resultados são apresentados sob a forma de gráficos nas figuras 13 a 24.

10 — ESCOAMENTOS COM CONDIÇÕES DE ENTRADA E SAÍDA IMPOSTAS

A — Pá circular

Consideremos uma roda centrífuga com pás circulares, figura 11. Designemos por O o centro da secção recta da roda, C o centro de curvatura da secção da pá, e P_1 um ponto sobre a pá à entrada. Os pontos O, C e P_1 definem um triângulo em que um dos ângulos internos

β é suplemento do ângulo formado pela velocidade relativa $\overline{w}_1$ à entrada com a direcção tangencial.

Os valores

R — raio de curvatura da secção da pá

l — distância entre os pontos O e C

podem ser determinados se forem conhecidos os triângulos das velocidades à entrada e à saída da roda. Assim, pelo teorema de Carnot;

$$l = \sqrt{R^2 + r_1^2 - 2\ R\ r_1 \cos \beta'_1} \qquad (10.1\text{-A})$$

Consideremos o triângulo OCP_2 em que P_2 é um ponto da pá na periferia da roda. Conhecendo o triângulo das velocidades à saída o ângulo β'_2 fica definido, e então

$$l = \sqrt{R^2 + r_2^2 - 2\ R\ r_2 \cos \beta'_2} \qquad (10.1\text{-B})$$

Igualando as expressões (10.1-A) e (10.1-B) obtemos

$$R = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2\ (r_2 \cos \beta'_2 - r_1 \cos \beta'_1)} \qquad (10.2)$$

e a substituição deste valor em (10.1) permite calcular l

Por aplicação sucessiva do teorema de Carnot ao triângulo OCP podemos também obter as relações (figura 11):

$$\beta = \text{arc cos} \left(- \frac{R^2 + r^2 - l^2}{2\ R\ r} \right) \qquad (10.3)$$

$$\varepsilon = \text{arc cos} \frac{R^2 + l^2 - r^2}{2\ R\ l} \qquad (10.4)$$

$$\theta = \gamma - \text{arc cos} \frac{R^2 + l^2 - r^2}{2\ r\ l} \qquad (10.5)$$

com

$$\gamma = \text{arc cos} \frac{l^2 + r_1^2 - R^2}{2\ l\ r_1} \qquad (10.6)$$

A igualdade (10.5) é a equação das linhas de corrente.

O perímetro das linhas de corrente calcula-se facilmente pela expressão

$$s = R\varepsilon \qquad (10.7)$$

Para o cálculo da velocidade e aceleração é necessário conhecer o valor do ângulo β, e o valor da derivada $d\beta/dr$ obtida por diferenciação da equação (10.3)

$$\frac{d\beta}{dr} = \frac{\text{cosec}\ \beta}{2\ R} + \frac{\text{cotg}\ \beta}{r} \qquad (10.8)$$

A pressão exercida sobre as pás calcula-se também, substituindo os valores agora obtidos na relação (4.16).

B — Variação Linear de β

Admitindo um crescimento linear de β ao longo da pá, podemos escrever, para o perímetro elementar da pá ds

$$\frac{d\beta}{dr} = a = \text{Constante} \qquad (10.9)$$

Então, por (2.30)

$$\frac{d\beta}{dr} = a\ \text{cosec}\ \beta \qquad (10.10)$$

e integrando

$$\cos \beta_1 - \cos \beta = a\ (r - r_1) \qquad (10.11)$$

Esta relação permite-nos ainda calcular o valor de a

$$a = \frac{\cos \beta_1 - \cos \beta_2}{r_2 - r_1} \qquad (10.12)$$

Não é possível obter a equação das linhas de corrente na sua forma integrada. No entanto, podemos fazer o seu cálculo aproximadamente

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta r} = \frac{\text{cotg}\ \beta}{r} \qquad (10.13)$$

para intervalos pequenos Δ r.

Substituindo (10.10) nas equações das velocidades e acelerações podemos ainda escrever:

$$\overline{w}' = - \frac{w^2}{r} \left(\overline{r}_1 + d\ r\ \text{cosec}\ \beta\ \overline{\theta}_1 \right) \qquad (10.14)$$

$$c' = - \frac{1}{r} \left[(a r\ \text{cosec}\beta\ w^2 - u\ w - 2\ u\ w_r)\ \overline{\theta}_1 \right] \qquad (10.15)$$

A diferença de pressão entre as pás será:

$$\Delta p_{11} = - \frac{2\pi}{z} \text{sen}\beta\ \cos\beta\ w^2_r (1 - a\ r\ \sec \beta + \frac{u^2}{w^2_r} \text{sen}^2\beta + 2 \frac{u}{w_r} \text{tg}\beta) \qquad (10.16)$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

1 — Bombas Centrífugas e Turbocompresores — Carl Pfleiderer — Editorial Labor (1960)

2 — Centrifugal and Axial Flow Pumps — A. J. Stepanofi — John Wiley e Sons (1967)

3 — Fluid Mechanics of Turbomachinery — George F. Wislicenus — Dover Publications (1965)

4 — Fluid Mechanics, Thermodynamics of Turbomachinery — S. L. Dixon — Pergamon Press (1966)

5 — Introduction to the Theory of Flow Machines — Albert Betz — Pergamon Press (1966)

6 — Máquinas de Fluxo — Richard Bran, Zulcy de Sousa — Ao Livro Técnico (1969)

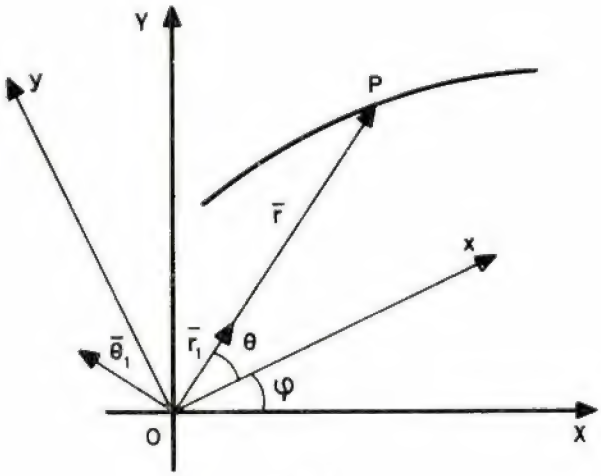


Fig. 1

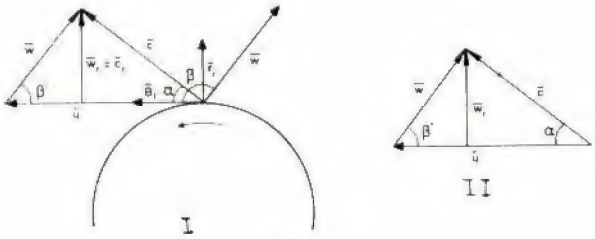


Fig. 2

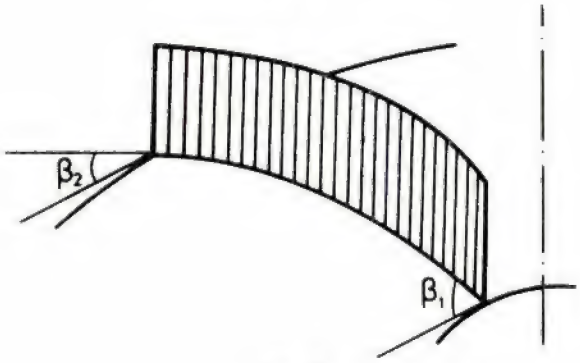


Fig. 3

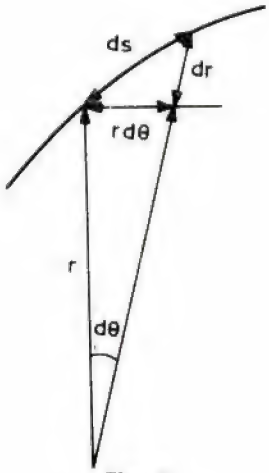


Fig. 4

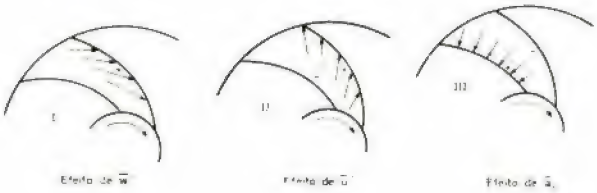


Fig. 5

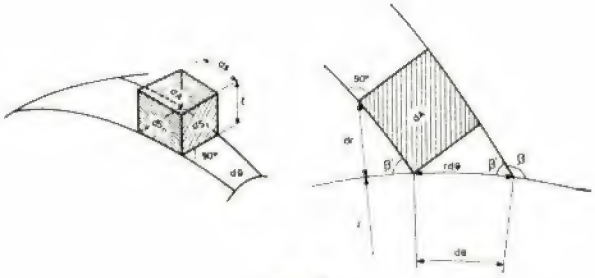


Fig. 6

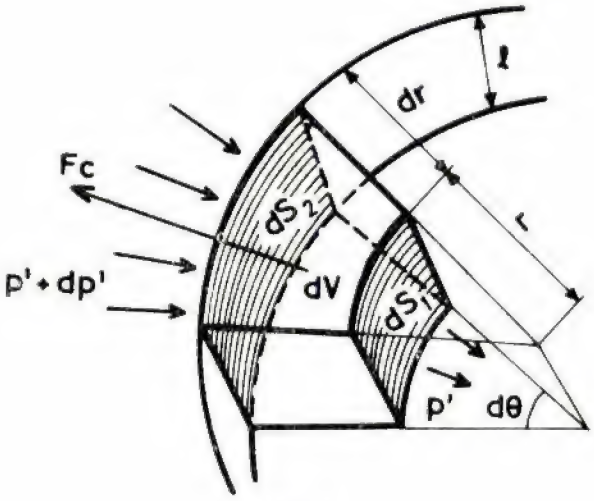


Fig. 7

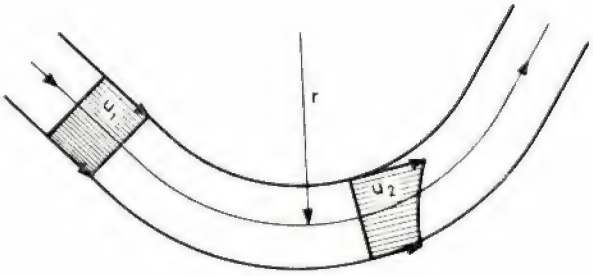


Fig. 8

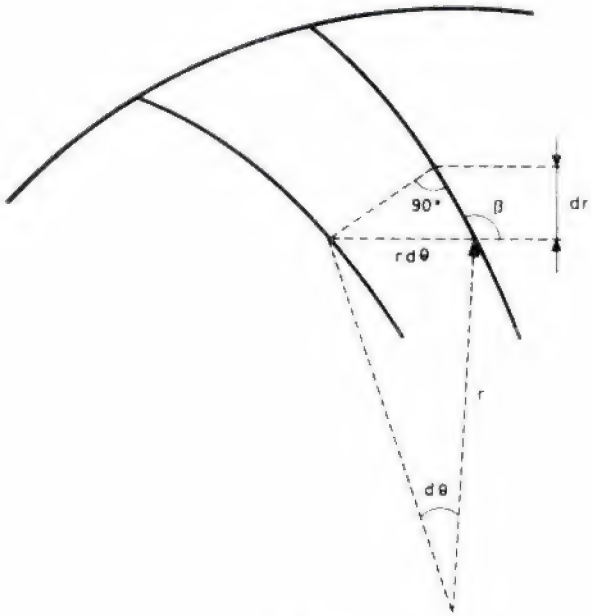


Fig.9

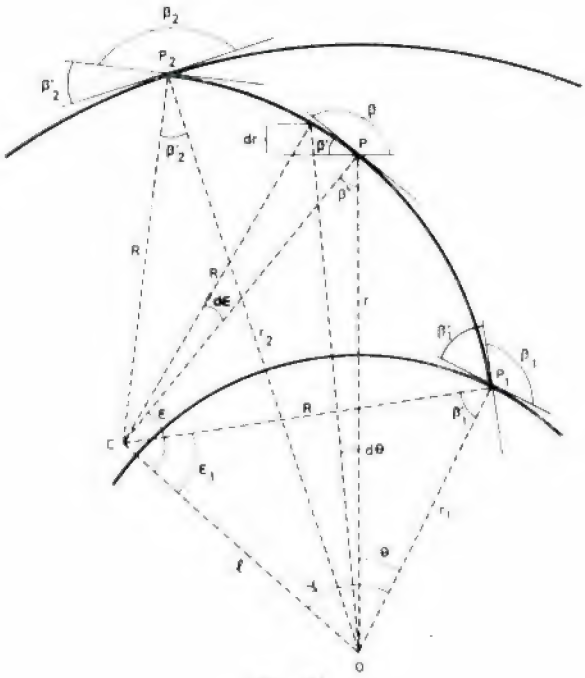


Fig. 11

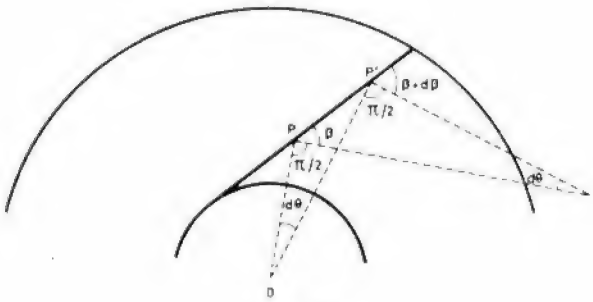


Fig. 12

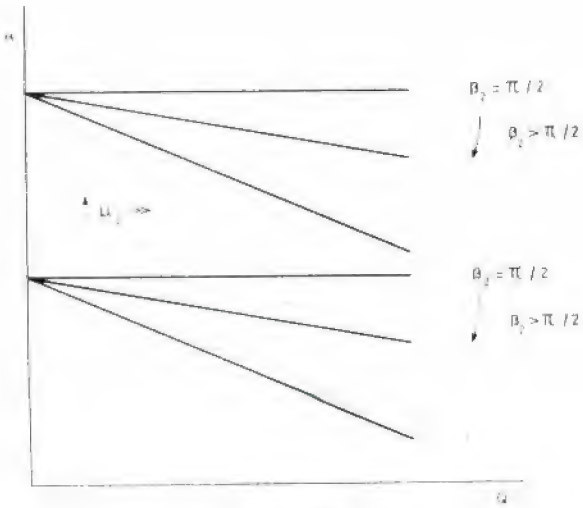


Fig. 10

PERFIL DAS PÁS

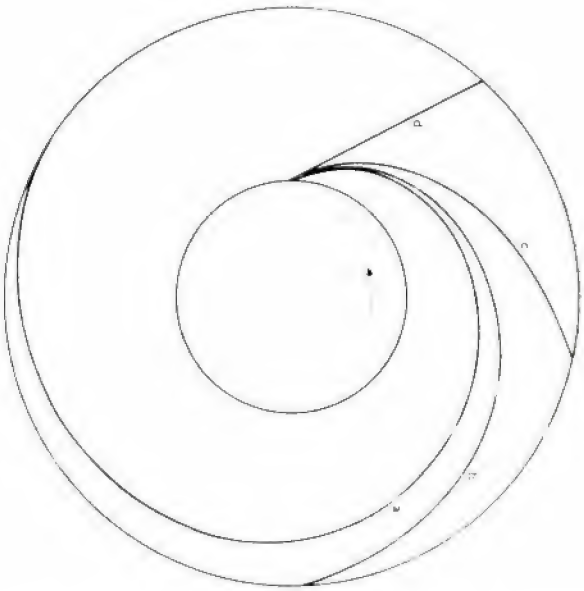


Fig. 13

a — Escoamento a energia constante
b — Escoamento com velocidade relativa constante
c — Escoamento com inclinação tangencial constante
d — Pá plana

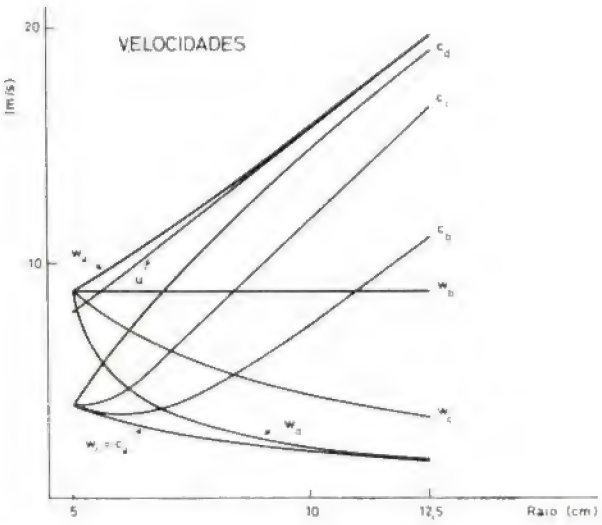


Fig. 14

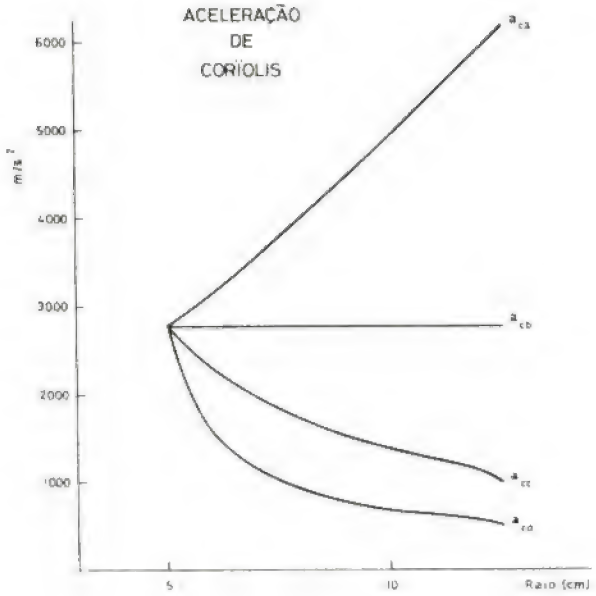


Fig. 16

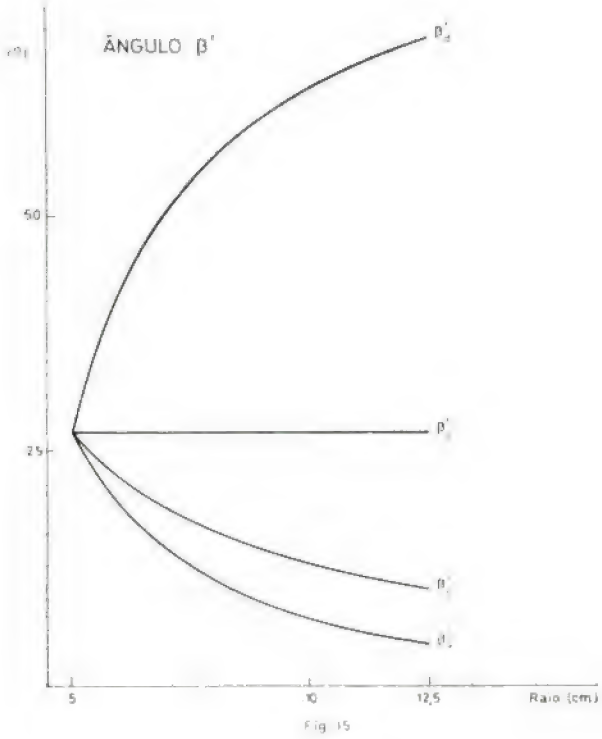


Fig. 15

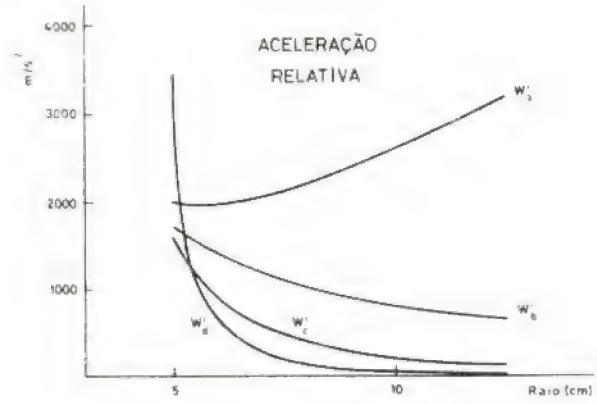


Fig. 17

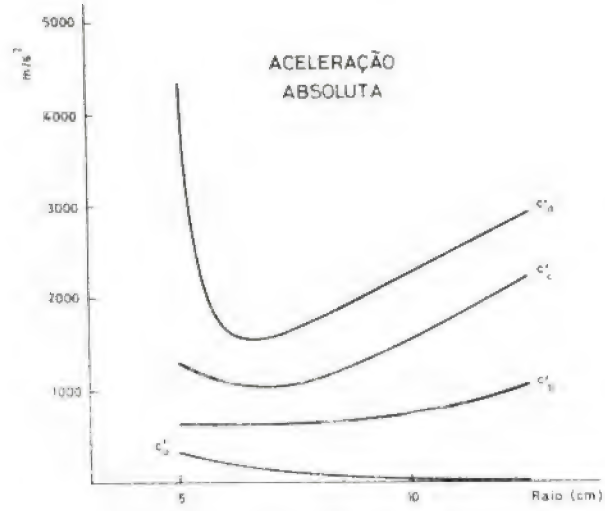


Fig. 18

PRESSÃO RELATIVA AO LONGO
DE UMA LINHA CORRENTE

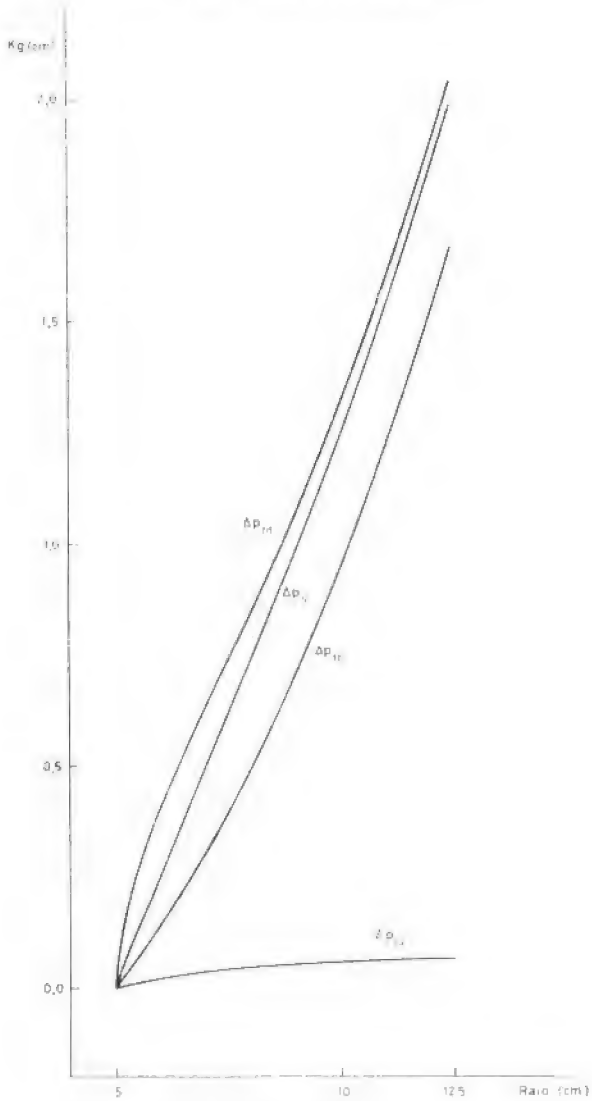


Fig. 19

DIFERENÇA DE PRESSÃO
ENTRE AS FACES ANTERIOR
E POSTERIOR DA PÁ

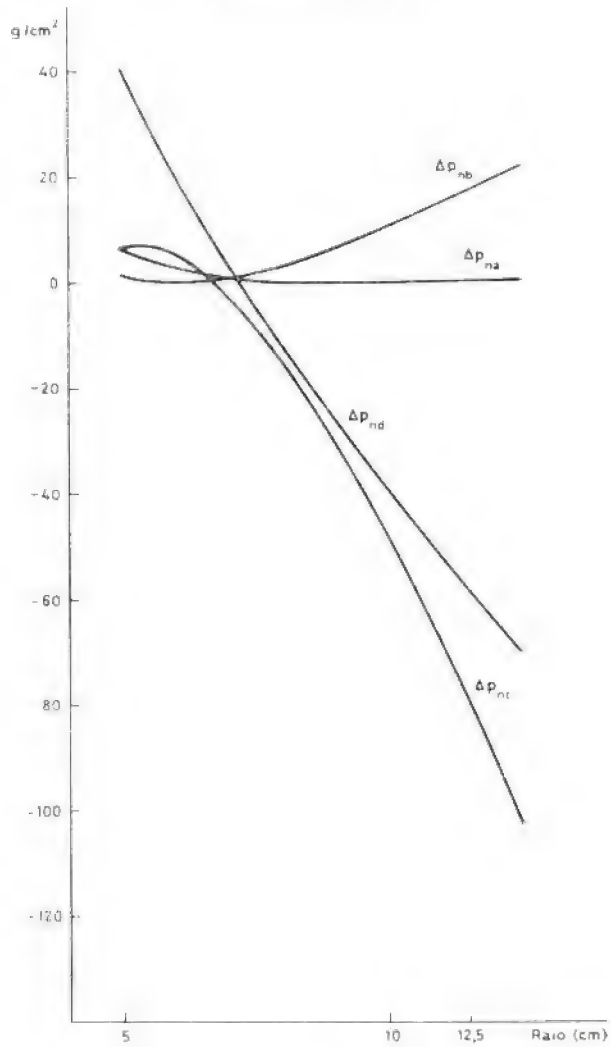


Fig. 20

NÍVEIS DE ENERGIA DO FLUÍDO
NO PERCURSO DA RODA
$\alpha = \alpha_K$

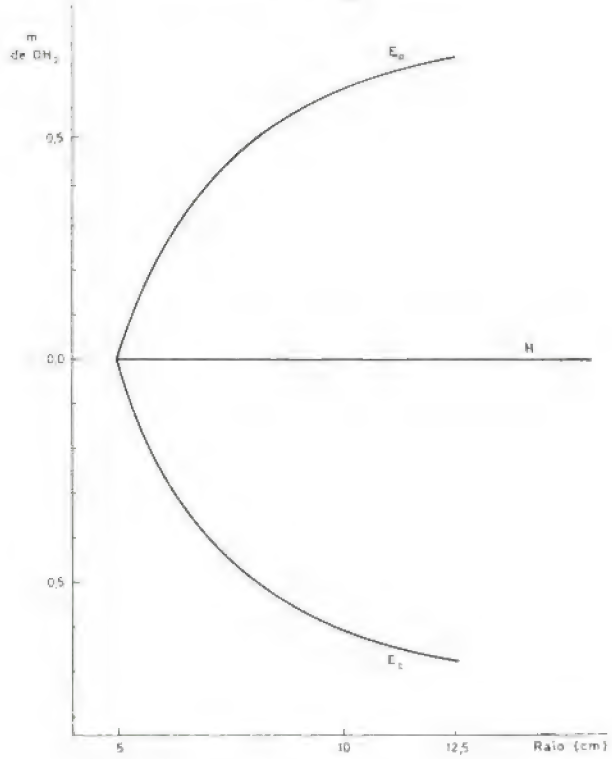


Fig. 21

NÍVEIS ED ENERGIA DO FLUÍDO
NO PERCURSO DA RODA
PÁ PLANA

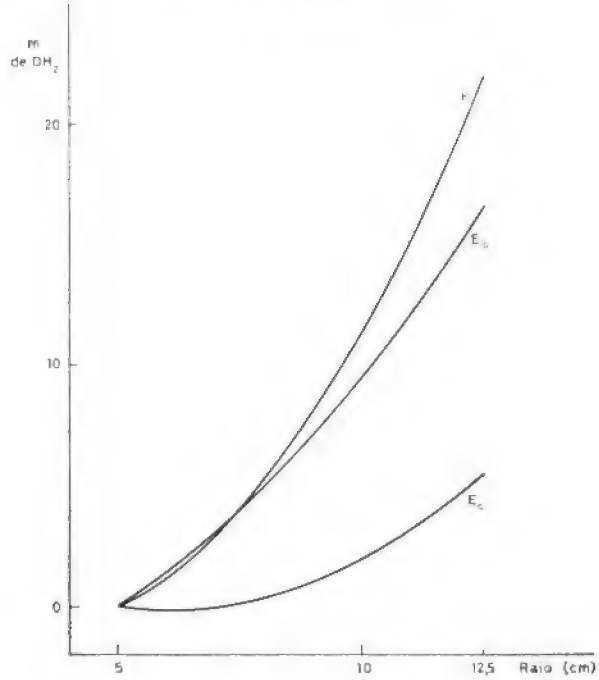


Fig. 22

NÍVEIS ED ENERGIA DO FLUÍDO
NO PERCURSO DA RODA
$W = W_K$

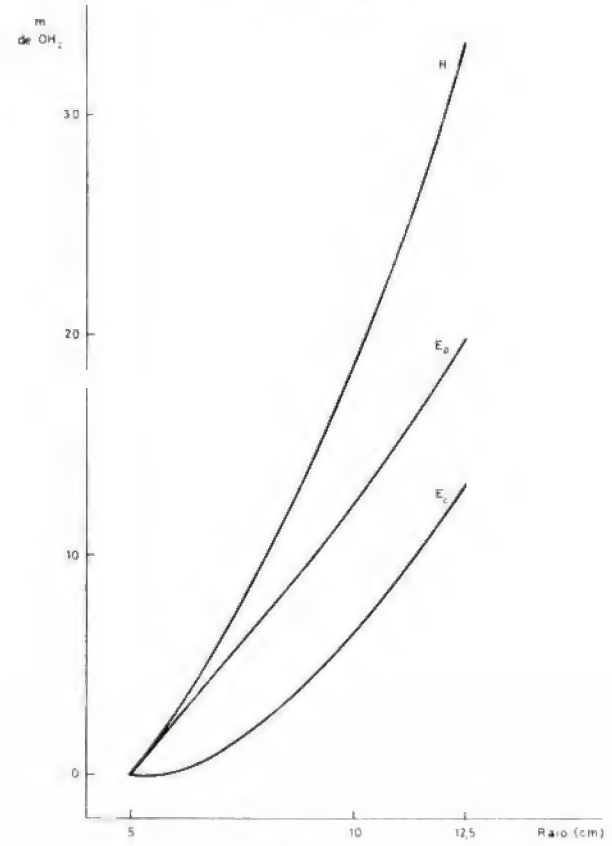


Fig. 23

NÍVEIS DE ENERGIA DO FLUÍDO
NO PERCURSO DA RODA
$\beta = \beta_K$

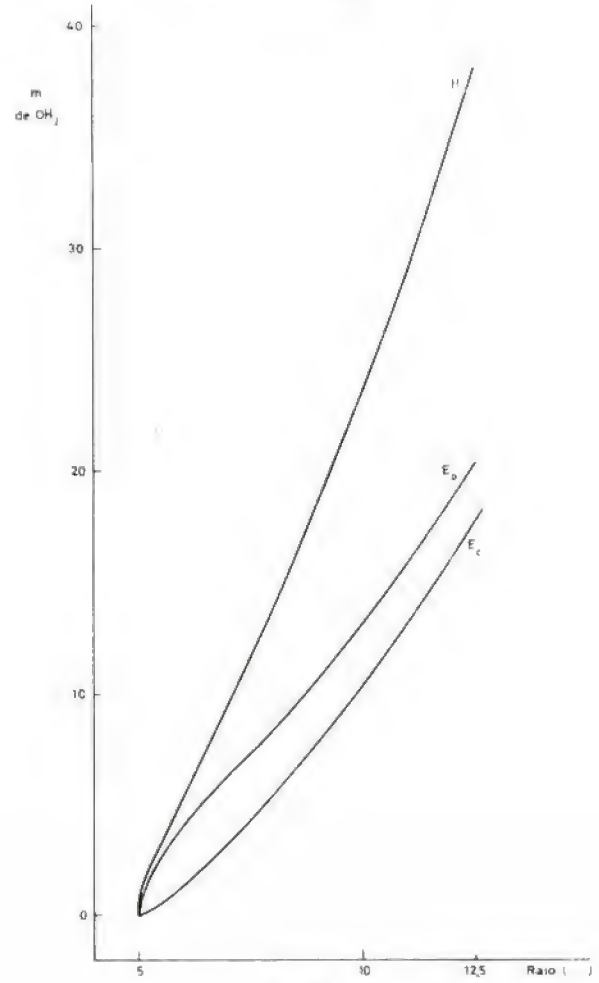


Fig. 24

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
3.° Journees Internationales Informatique et Industrie «La Telegestions dans l'Industrie»	Paris 29 a 30 de Janeiro - 76
Concrete and Aggregates Industries Look Forward to Giant Houston Show in'76	Houston - Texas 1 a 5 de Fevereiro - 76
Internacional Spring Fair	Birmingham 1 a 5 de Fevereiro - 76
PRO — IN'76 Congresso Internacional e Exposição de Novidades	Düsseldorf 21 a 25 de Fevereiro - 76
IMONTA'76 — Internationale Messe für Schwertransport und Montage-Technik	Düsseldorf 25 a 29 de Fevereiro - 76

MAGUE

«Fornecimento de 20 Guindastes eléctricos para a Administração Geral do Porto de Lisboa, com 3 e 6 toneladas de capacidade de 24 m de alcance.»
(na fotografia, 5 desses Guindastes já em serviço)

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

TELEF. 5 20 91/2/3 — OVAR - PORTUGAL — TELEG. FELTROS

FELTROS TECIDOS

TECIDOS FILTRANTES E INDUSTRIAIS

de fibras naturais ou sintéticas, puras ou em mistura
em qualquer formato e dimensão
para

Indústria papeleira
Pastas para papel
Fibrocimento
Curtumes
Industriais têxteis
Estamparia
Acabamentos
Lavandarias
Hospitais e Hotéis
Lonas em sintético

Correias transportadoras
Indústrias químicas
Filtração de água
Cervejas
Refrigerantes
Lacticínios
Azeite e produtos oleosos
Produtos gordurosos
Geleias

Vinhos
Açúcar
Farinhas alimentares
Sabões e detergentes
Cerâmicas
Captação e recuperação de poeiras
Despoeiragens
Tubos de ventilação
etc., etc., etc.

OS NOSSOS SERVIÇOS TÉCNICOS ESTÃO SEMPRE À VOSSA INTEIRA DISPOSIÇÃO PARA ESTUDAR QUALQUER PROBLEMA DE TECIDOS INDUSTRIAIS

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
Tr. do Guarda Mór, 13-r/c
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
R. Francisco Newton, 389/393
C. P. 2178 - Tel. 81 89 7

MOÇAMBIQUE
L. Marques - C. P. 982 - Tel. 74 11 21
Beira - C. P. 1002 - Tel. 7 14 97

C. D. U. 536:533.27.5

Termodinâmica molecular do gás perfeito

J. A. MARTINHO SIMÕES * e
C. A. NIETO DE CASTRO
Laboratório de Química-Física
Instituto Superior Técnico

RESUMO

Apresenta-se uma revisão crítica da determinação teórica de propriedades termodinâmicas de gases perfeitos. Com base na Termodinâmica Estatística e em dados fornecidos pela análise espectroscópica indicam-se métodos de cálculo de várias contribuições para os valores das funções termodinâmicas. Finalmente, aplica-se o estudo às moléculas de CO_2, NH_3 e SO_2 e comparam-se resultados calculados de S e C_p com valores experimentais.

ABSTRACT

A critical review about the theoretical determination of thermodynamic properties of perfect gases is made. Based in Statistical thermodynamics and in data derived from spectroscopic analysis, methods of calculus of several contributions for the values of the thermodynamic functions are indicated. Finally, the study is applied to the calculation of molar entropy and heat capacity of simple polyatomic molecules, viz CO_2, NH_3 and SO_2. A comparison with exprerimental values is made.

1 — INTRODUÇÃO

As propriedades termodinâmicas de uma substância — sólida ou fluida — estão intimamente relacionadas com as qualidades inerentes às moléculas que a constituem. Por outras palavras, e , mais abrevidamente, pode afirmar-se que as propriedades microscópicas (das moléculas, ou dos «sistemas») determinam os valores das grandezas macroscópicas (do conjunto, ou da «assembleia»).

A asserção anterior, que é, aliás, intuitiva, levou a pensar na possibilidade do cálculo de propriedades termodinêmicas de uma assembleia, conhecidos os atributos que caracterizam os sistemas que a compõem. Porém, para passar do microscópico ao macroscópico é necessário dispôr de uma teoria que estabeleça a ligação entre os dois domínios. Ora a Termodinâmica Estatística, na fase actual de compreensão das interacções moleculares, desempenha cabalmente tal função para o estado gasoso.

Nos parágrafos que se seguem vamos ilustrar este ponto, através da determinação de calores específicos a volume constante, C_p , e de entropias, S, de gases constituídos por moléculas simples, mediante a aplicação de vários modelos físicos e a utilização de dados moleculares, fornecidos pela análise espectroscópica.

O princípio do método é simples. A termodinâmica Estatística introduz uma função denominada «função de partição», Z, a qual está relacionada, quer com os níveis energéticos ε_i das moléculas, quer com as propriedades termodinâmicas da assembleia (como o seu nome indica, Z determina a distribuição dos sistemas pelos níveis ε_i). Assim, pode demonstrar-se que [1]:

$$Z = \sum_i w_i \, e^{-\varepsilon_i/kT} \tag{1}$$

e que, por exemplo,

$$\frac{E}{NkT} = T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_{V,N} \tag{2}$$

$$\frac{A}{NkT} = -\ln Z \tag{3}$$

e

$$\frac{C_v}{Nk} = \left\{ \frac{\partial}{\partial T} \left[T^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_{V,N} \right] \right\}_{V,N} \tag{4}$$

sendo E e A respectivamente a energia interna e a energia de Helmholtz do gás, w_i a degenerescência do nível ε_i, T a temperatura absoluta, N o número de Avogadro, k a constante de Boltzmann e V o volume da assembleia.

* Os resultados agora apresentados tiveram origem num trabalho realizado no ano lectivo de 1973/74, integrado na cadeira de Laboratórios, por J. A. M. S. e M. Isabel S. MARTINS.

Todo o problema parece, pois, resumir-se ao desenvolvimento de Z em função da temperatura, desde que sejam conhecidos os valores de ε_i e de w_i.

A energia total, ε, de uma molécula pode ser obtida pela resolução da equação de Schrödinger

$$H\psi = \varepsilon\psi \qquad (5),$$

onde H representa o hamiltoniano. Uma maneira usual de simplificar este problema consiste em supôr independentes as várias formas de energia molecular: translacional (ε_t), rotacional (ε_r), vibracional (ε_v) e electrónica (ε_e). Assim, o hamiltoniano da equação (5) aparece como a soma de quatro termos independentes, o mesmo acontecendo, por consequência a ε:

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_v + \varepsilon_e \qquad (6).$$

A confirmação desta hipótese é feita «a posteriori» pela comparação de valores calculados com resultados experimentais.

Os três primeiros termos de (6) correspondem, em geral, a outras tantas soluções da equação de Schrödinger aplicada respectivamente ao modelo de uma partícula pontual de massa m, contida numa caixa de volume V (que corresponde ao modelo do gás perfeito), ao modelo do rótor rígido e ao modelo do oscilador harmónico linear. A resolução de cada um destes problemas conduz a uma expressão quântica dos níveis de energia.

A equação (6) pode ser sofisticada. Por um lado, é possível introduzir um termo que dá conta da interacção entre a rotação e a vibração da molécula (ε_{rv}), o que equivale a admitir a interdependência entre estas duas formas de energia. Simultaneamente, qualquer um dos três modelos físicos referidos pode ser refinado, mediante a introdução de correcções, como as devidas à anarmonicidade (do oscilador), ε_a, à distorção centrífuga (do rótor), ε_{dc}, etc.. Vem então

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_v + \varepsilon_e + \varepsilon_{rv} + \varepsilon_a + \varepsilon_{dc} + \ldots \qquad (7).$$

Introduzindo (7) em (1) tira-se que a função de de partição será o produto de sete (ou mais) termos, cada um correspondente a um «tipo» de energia. O mesmo se poderá dizer a respeito das equações (2), (3) e (4), onde os valores de E, A e C_v virão dados por uma soma de sete parcelas.

Em conclusão, conhecidas as expressões quantificadas dos termos de (7) e desenvolvendo os somatórios de (1) é possível o cálculo das contribuições das várias formas de enregia molecular para as propriedades termodinâmicas do gás.

2 — ESTUDO DAS PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS DE MOLÉCULAS SIMPLES

2.1

Como foi referido na introdução, a Termodinâmica Estatística indica-nos a forma como os sistemas se distribuem pelos diferentes níveis de energia acessíveis O número de moléculas n_i num nível ε_i será

$$n_i = N \cdot \frac{w_i\, e^{-\varepsilon_i/kT}}{Z} \qquad (8)$$

Quando se faz incidir sobre uma amostra de gás um feixe de energia ε, as moléculas são excitadas a níveis energéticos superiores. Como se sabe, a espectroscopia do Raman e infravermelhos permite-nos dar conta de dois tipos de níveis de energia — rotacionais e vibracionais — e a do visível e ultravioleta mostra-nos a existência dos níveis electrónicos.

A energia necessária para «promover» as moléculas do estado fundamental ao primeiro estado excitado, bem como as diferenças entre os níveis correspondentes às várias formas de energia, varia do seguinte modo:

$$\Delta\varepsilon_t << \Delta\varepsilon_r << \Delta\varepsilon_v << \Delta\varepsilon_e$$

Na ausência de radiações incidentes (gás em equilíbrio) as moléculas só poderão ser promovidas pela agitação térmica, cuja energia é da ordem de kT. Sendo assim, a análise qualitativa das diferentes contribuições para as propriedades termodinâmicas poderá ser feita através da comparação do valor de kT e do valor de $\Delta\varepsilon$ correspondente aos graus de liberdade em causa. Então, por exemplo, para uma molécula diatómica típica, tem-se:

$$\Delta\varepsilon_t = 0\ (10^{-18}\text{eV})$$
$$\Delta\varepsilon_r = 0\ (5 \times 10^{-4}\text{eV})$$
$$\Delta\varepsilon_v = 0\ (0{,}3\ \text{eV})$$
$$\Delta\varepsilon_e = 0\ (5\ \text{eV})$$
$$kT\ (300\ \text{K}) = 0\ (0{,}03\ \text{eV})$$

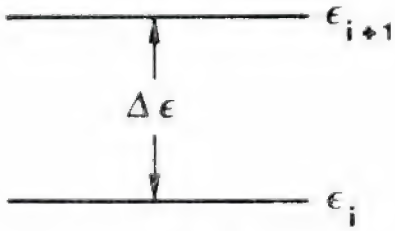


Fig. 1

Sabendo que $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$ (Figura 1), podemos tirar algumas conclusões com base na relação (8). Assim, por exemplo à temperatura ambiente, constatamos que os níveis translacionais estão todos ocupados ($\Delta\varepsilon_t << kT$, de onde a aproximação de considerar um «contínuo» de níveis de energia e a igualdade dos resultados obtidos pelas teorias clássica e quântica); os níveis rotacionais excitados estarão também bastante ocupados ($\Delta\varepsilon_r$ é cerca de 60 vezes menor que kT); os vibracionais superiores estarão praticamente vazios ($\Delta\varepsilon_v$ é cerca de 10 vezes superior a kT); finalmente,

1 — O (x) significa «função da ordem de x».

no caso dos níveis electrónicos verifica-se apenas a ocupação do estado fundamental, ε_0. Portanto, se para uma dada temperatura compararmos $\Delta\varepsilon$ com kT poderemos ter ideia das diferentes contribuições para as propriedades termodinâmicas, ou seja, mais precisamente, se será válida a aplicação do Princípio da Equipartição da Energia, o qual, como se sabe, é apenas utilizável no caso clássico ($\Delta\varepsilon << kT$) [4].

2.2 — CONTRIBUIÇÃO TRANSLACIONAL

A resolução da equação de Schrödinger aplicada ao modelo de uma partícula pontual de massa m que se move num volume V conduz a [2]

$$\varepsilon_t = \frac{h^2}{8\,m}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}\right) \qquad (9)$$

e a

$$w_t = 1 \qquad (10),$$

tal que abc = V . h é a constante de Planck e p, q, r são números quânticos que tomam valores inteiros, positivos, superiores ou iguais à unidade.

A substituição de (9) em (1) conduz à relação

$$Z_t = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}\right)\frac{h^2}{8\,m\,k\,T}\right\} \qquad (11),$$

a qual pode ssr factorizada num produto de três somatórios, em p, em q e em r. A resolução de cada um dos termos é imediata se nos lembrarmos de que $\Delta\varepsilon_t << kT$, mesmo a temperaturas apreciavelmente baixas. Nestas condições, é fácil ver que as quantidades

$$\alpha_a = \frac{h^2}{8\,m\,a^2\,kT}$$

$$\alpha_b = \frac{h^2}{8\,m\,b^2\,kT}$$

e

$$\alpha_c = \frac{h^2}{8\,m\,c^2\,kT}$$

são muito inferiores à unidade e que, portanto, será lícito substituirmos os somatórios por integrais [1]. Vem

$$Z_t = \int_0^{\infty} e^{-\alpha_a p^2}\,dp.\ \int_0^{\infty} e^{-\alpha_b q^2}\,dq.\ \int_0^{\infty} e^{-\alpha_c r^2}\,dr \qquad (12),$$

o que nos conduz a

$$Z_t = \left(\frac{2\,\pi\,m\,kT}{h^2}\right)^{3/2}.\ V \qquad (13),$$

que é, pois, a expressão da função de partição translacional para uma molécula de um gás perfeito.

A obtenção das expressões das propriedades termodinâmicas é imediata. Contudo, não podemos esquecer que estamos a estudar uma assembleia composta por sistemas idênticos, independentes e não-localizados. Ora demonstra-se [3] que, neste caso, a função de partição translacional da assembleia dos N sistemas é

$$Q_t = \frac{Z_t^N}{N\,!} \qquad (14).$$

A única alteração a fazer é na equação (3), a qual se pode escrever sob a forma geral

$$A = -\,kT\ \ln Z^N$$
$$= -\,kT\ \ln Q \qquad (15).$$

Assim, para o caso em estudo,

$$A_t = -\,kT\ \ln Z_t^N + kT\ \ln N! \qquad (16).$$

Como N é muito grande ($\sim 10^{23}$) é válida a aproximação de Stirling [1]

$$\ln N! = N\ \ln N - N \qquad (17).$$

Substituindo-se em (16) e rearranjando, obtém-se

$$\left(\frac{A}{NkT}\right)_t = -\ \ln Z_t + \ln N - 1 \qquad (18),$$

em que Z_t é dada por (13).

A relação final de $(A/NkT)_t$ aparece numa forma mais prática de utilização se recorrermos à equação de estado do gás perfeito, pV = NkT, e, simultaneamente, se efectuarmos algumas transformações, de modo a podermos substituir as várias grandezas, que nela figuram, em unidades mais correntes. Vem então

$$\left(\frac{A}{NkT}\right)_t = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ \ln M - \frac{5}{2}\ \ln \frac{T}{1{,}594} - \ln p \qquad (19),$$

sendo M o peso molecular (em gramas), T a temperatura absoluta e p a pressão (em atmosferas).

As equações (2) e (4), referentes respectivamente a E e a C_v, não necessitam de alterações, uma vez que envolvem derivadas de $\ln Z_t$ em ordem a T (o que anula o termo ln N!). Por consequência, substituindo (13) em (2) e em (4) e resolvendo as derivadas tira-se que

$$\left(\frac{E}{NkT}\right)_t = \frac{3}{2} \qquad (20)$$

e

$$\left(\frac{C_v}{Nk}\right)_t = \frac{3}{2} \qquad (21),$$

resultados que são concordantes com os obtidos com base no Princípio da Equipartição da Energia (três graus de liberdade vezes $\frac{1}{2}$ kT para a energia de cada um).

2.3 — CONTRIBUIÇÃO ELECTRÓNICA

Ao contrário do que acontece para o caso da translação, agora $\Delta\varepsilon_e >> kT$, mesmo a temperaturas eleva-

das. Vejamos quais as consequências deste facto. Escrevendo alguns termos de (1), vem:

$$Z_e = w_0\, e^{-\varepsilon_0/kT} + w_1\, e^{-\varepsilon_1/kT} + \ldots \qquad (22).$$

Como, por convenção, $\varepsilon_0 = 0$, segue-se que $\Delta\varepsilon_e = \varepsilon_1 >> kT$. Assim, o segundo termo da equação anterior é praticamente igual a zero. E, por maioria de razão, o mesmo acontece aos seguintes (em ε_2, ε_3, etc.), cuja diferença em relação a ε_0 é ainda maior. O resultado final é, pois,

$$Z_e = w_0 \qquad (23).^{2}$$

Com o auxílio de (2), (3) e (4) obtêm-se as contribuições electrónicas para as propriedades termodinâmicas respectivas:

$$\left(\frac{E}{NkT}\right)_e = 0 \qquad (24).$$

$$\left(\frac{A}{NkT}\right)_e = -\ln w_0 \qquad (25)$$

e

$$\left(\frac{C_v}{Nk}\right)_e = 0 \qquad (26).$$

2.4 — CONTRIBUIÇÃO VIBRACIONAL

A contribuição vibracional é deduzida, em primeira aproximação, com base no modelo do oscilador harmónico linear.

A resolução da equação de Schröringer aplicada a esto problema conduz à expressão:

$$\varepsilon_v = \sum_i \left(v_i + \frac{d_i}{2}\right) h\, \nu_i \qquad (27),$$

onde o somatório se estende ao número de frequências ν_i da molécula[3]; d_i é a degenerescência da vibração i e N_i é o número quântico da mesma vibração, o qual pode tomar valores inteiros, positivos, superiores ou iguais a zero.

A substituição de (27) em (1), após tratamento adequado, leva-nos à expressão de Z_v [1]:

$$Z_v = \prod_i \left(\frac{e^{-h\nu_i/2kT}}{1 - e^{-h\nu_i/kT}}\right)^{d_i} \qquad (28),$$

do onde se tiram as contribuições para as propriedades termodinâmicas:

$$\left(\frac{E}{NkT}\right)_v = \sum_i \left(\frac{h\nu_i}{2kT} + \frac{h\nu_i/kT}{e^{h\nu_i/kT} - 1}\right) d_i \qquad (29),$$

$$\left(\frac{A}{NkT}\right)_v = \sum_i \left[\frac{h\nu_i}{2kT} + \ln\left(1 - e^{-h\nu_i/kT}\right)\right] d_i \qquad (30).$$

e

$$\left(\frac{C_v}{Nk}\right)_v = \sum_i \left[\left(\frac{h\nu_i}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu_i/kT}}{(e^{h\nu_i/kT} - 1)}\right] d_i \qquad (31).$$

2.5 — CONTRIBUIÇÃO ROTACIONAL

O estudo da contribuição rotacional tem que ser realizado separadamente para vários tipos de moléculas, cada um deles caracterizado por um determinado comportamento de rotação. Nomeadamente, a subdivisão é feita atendendo aos valores dos momentos de inércia (I_a, I_b, I_c) e sua inter-relação.

Vamos apenas abordar o problema de moléculas lineares (di- ou poliatómicas), de moléculas de cume simétrico e de moléculas de cume assimétrico. Para estes três casos tem-se, respectivamente:

$I_a = I_c = 0;\ I_b \neq 0$

$I_a = I_b \neq I_c;\ I_a, I_b, I_c \neq 0$

$I_a \neq I_b \neq I_c;\ I_a \neq I_c;\ I_a, I_b, I_c \neq 0$

2.5.1 — MOLÉCULAS LINEARES

A expressão dos níveis de energia do rótor rígido, obtida pela resolução da equação de Schrödinger, é, para este caso,

$$\varepsilon_r = B_0\, h\, J\,(J + 1) \qquad (32).$$

sendo a degenerescência do nível ε_J

$$w_J = 2J + 1 \qquad (33).$$

J é o número quântico rotacional, que toma valores inteiros, positivos, superiores ou iguais a zero; B_0 é a chamada constante rotacional para o estado fundamental de vibração ($v = 0$), dada por

$$B_0 = \frac{h}{8\pi^2 I_0} \qquad (34),$$

onde I_0 é o momento de inércia correspondente a $v = 0$.

A função de partição tem, pois, a forma inicial:

$$Z_r = \sum_{J=0}^{\infty} (2J + 1)\, e^{-B_0 hJ(J+1)/kT} \qquad (35).$$

Chamemos u à razão

$$u = \frac{B_0 h}{kT} \qquad (36)$$

e escrevamos os primeiros termos do somatório (35):

$$Z_r = 1 + 3\, e^{-2u} + 5\, e^{-6u} + \ldots \qquad (37).$$

Se $u > 1$ (ou $T < B_0\, h/k$) a série converge com rapidez, a qual será tanto mais acentuada quanto menor

(2) Para [illegible] em repouso, infinitamente afastados, $Z_e = w_0 \exp(D_e/kT)$, sendo D_e a energia de dissociação espectroscópica.

(3) M[illegible]tores utilizam o somatório estendido aos modos normais de vibração da molécula (3n-5 para moléculas lineares e 3n-6 para as [illegible]stantes, sendo n o número de átomos), pelo que, neste caso, será $d_i = 1$ para todo o i.

for a temperatura. Portanto, é possível desprezar termos superiores a uma dada ordem e, em seguida, deduzir as expressões das propriedades termodinâmicas. No entanto, a razão B_p h/k é, em geral, bastante inferior a 10 K. O estudo deste caso não tem, assim, qualquer interesse imediato, uma vez que, a essas temperaturas, a hipótese do gás perfeito perde a sua validade.

Se $u < 1$ (ou $T > B_0$ h/k) a série converge muito mais lentamente que no caso anterior. Por isso não é viável trabalharmos com a expressão de Z_r tal como se apresenta em (35), dado que, para tal, seria necessário considerarmos um número enorme de termos (tanto maior quanto maior a temperatura e o grau de precisão desejado), o que complicaria extraordinariamente as relações das propriedades termodinâmicas.

A maneira de resolver o problema consiste em aplicar à equação (35) o teorema de Euler-MacLaurin:

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) \sim \int_0^{\infty} f(x)\, dx + \eta \qquad (38),$$

onde η representa o valor do erro que se comete quando se substitui o somatório pelo integral, e que é dado por

$$\eta = \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{12} f^{(i)}(0) + \frac{1}{720} f^{(iii)}(0) - \frac{1}{3040} f^{(v)}(0) + \ldots \qquad (39).$$

Fazendo, no caso em estudo,

$$f(x) = (2x+1)\, e^{-x(x+1)u} \qquad (40),$$

e recorrendo ao teorema citado, obtém-se facilmente que

$$Z_r = \frac{1}{\sigma u}\left(1 + \frac{u}{3} + \frac{u^2}{15} + \frac{4u^3}{315} + \frac{u^4}{315} + \ldots\right) \qquad (41)^4,$$

desprezando termos de ordem superior.

Notemos que, quanto maior for a temperatura, menor será o valor de u e, portanto, maior o número de termos de (41) que podemos desprezar (recordemos que estamos a analizar o caso em que u é sempre inferior à unidade). No caso limite, isto é, com $u << 1$,

$$Z_r = \frac{1}{\sigma u} = \frac{kT}{\sigma B_0 h} \qquad (42),$$

que é a função de partição rotacional clássica.

Em resumo, os termos polinominais de (41) devem ser utilizados quando a temperatura não é suficientemente alta para que, com um dado grau de precisão, se possam obter valores de Z_r.

O passo que vamos dar em seguida é, uma vez mais, o cálculo das expressões termodinâmicas.

No que se refere à energia de Helmholtz não existe qualquer problema. De acordo com (3) tem-se

$$\left(\frac{A}{NkT}\right)_r = \ln\sigma + \ln u - \ln\left(1 + \frac{u}{3} + \frac{u^2}{15} + \frac{4u^3}{315} + \frac{u^4}{315}\right) \qquad (43).$$

Para a energia interna e para o calor específico, onde se torna necessário o cálculo de derivadas, pode pôr-se uma questão quanto ao procedimento a adoptar. Por um lado, podemos desenvolver o $\ln Z_r$ em série de MacLaurin, desprezando os termos de ordem superior à quarta[5] e, em seguida, derivar; por outro lado, é possível derivar directamente o $\ln Z_r$. Embora a via que parece mais correcta seja esta última, o que se verifica é que, no primeiro caso, ocorre uma compensação de erros (devidos às aproximações de (38), (41) e ao desenvolvimento de MacLaurin), obtendo-se, por consequência, um valor mais correcto. No entanto, e como seria de esperar, registemos que a diferença entre as duas opções só se manifesta a temperaturas razoavelmente baixas ($\sim$ 50 K).

Nestas condições, efectuando-se o desenvolvimento somos conduzidos a

$$\ln Z_r = -\ln\sigma - \ln u + \frac{u}{3} + \frac{u^2}{90} + \frac{8u^3}{2835} + \frac{59u^4}{56700} \qquad (44).$$

Assim, recorrendo a (2) e a (4), vem

$$\left(\frac{E}{NkT}\right)_r = 1 - \frac{u}{3} - \frac{u^2}{45} - \frac{8u^3}{945} - \frac{59u^4}{14175} \qquad (45)$$

e

$$\left(\frac{C_v}{Nk}\right)_r = 1 + \frac{u^2}{45} + \frac{16u^3}{945} + \frac{59u^4}{4725} \qquad (46).$$

No caso de $u << 1$, $(C_v/Nk)_r = 1$ e $(E/NkT)_r = 1$, o que coincide com o resultado clássico, seja o previsto pela aplicação da Mecânica Clássica (equação (42)), seja obtido através do Princípio da Equipartição da Energia.

2.5.2 — MOLÉCULAS DE CUME SIMÉTRICO

A relação dos níveis energéticos do rotor rígido é agora

$$\varepsilon_r = B_0 h J(J+1) + h(A_0 - B_0) K^2 \qquad (47),$$

sendo A_0 a constante rotacional correspondente a I_a para $v = 0$ e K um número quântico que toma valores inteiros compreendidos entre J e −J. Se $|K| < 0$ os estados são, portanto, duplamente degenerados.

(4) σ é o chamado «número de simetria» [1], que é, neste caso, introduzido «ad hoc» para dar conta da simetria de rotação da molécula. $\sigma = 2$ para moléculas diatómicas homonucleares ou moléculas poliatómicas com um plano de simetria normal ao eixo internuclear e que passa pelo centro de massa; $\sigma = 1$ para os casos restantes. Para os tipos de moléculas de que trataremos nos parágrafos seguintes, σ pode tomar valores superiores a 2.

(5) De modo que haja coerência com o facto de, na equação de Z_r, termos desprezado os termos de ordem superior à quarta.

O tratamento realizado neste caso é semelhante ao adoptado para as moléculas lineares. Assim, a expressão de Z_r que se obtém, e que foi pela primeira vez deduzido por Viney [5,6] é

$$Z_r = \frac{1}{\sigma} e^{u/4} \left[\frac{\pi}{B_o^2 A_o} \left(\frac{kT}{h} \right)^3 \right]^{1/2} \left(1 + \frac{1}{12} \alpha u + \frac{7}{480} \alpha^2 u^2 + \ldots \right) \quad (48),$$

onde u é dado por (36) e

$$\alpha = 1 - \frac{B_o}{A_o} \quad (49).$$

As opções que se podem pôr, com vista à determinação das propriedades termodinâmicas são as mesmas que as referidas no § 2.5.1. Contudo, o que agora se verifica é que a derivada directa do ln Z_r conduz a resultados ligeiramente melhores, embora a diferença entre os valores obtidos pelas duas vias seja, neste caso, ainda mais desprezável, mesmo a temperaturas bastante baixas. Assim, as expressões a que se chega são

$$\left(\frac{E}{NkT} \right)_r = -\frac{u}{4} + \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{12} \alpha u + \frac{7}{480} \alpha^2 u^2}{1 + \frac{1}{12} \alpha u + \frac{7}{480} \alpha^2 u} \quad (50),$$

$$\left(\frac{A}{NkT} \right)_r = \ln \sigma - \frac{u}{4} - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\pi}{B_o^2 A_o} \left(\frac{kT}{h} \right)^3 \right] - \ln \left(1 + \frac{1}{12} \alpha u + \frac{7}{480} \alpha^2 u^2 \right)$$

e (51)

$$\left(\frac{C_v}{Nk} \right)_r = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{45} \alpha^2 u^2 - \frac{7}{2880} \alpha^3 u^3 - \frac{49}{115200} \alpha^4 u^4}{1 + \frac{1}{6} \alpha u + \frac{13}{360} \alpha^2 u^2 + \frac{7}{2880} \alpha^3 u^3 + \frac{49}{230400} \alpha^4 u^4} \quad (52).$$

Notemos finalemnte que, se $u << 1$, somos conduzidos aos resultados clássicos de $(E/NkT)_r$ e de $(C_v/Nk)_r$.

2.5.3 — MOLÉCULAS DE CUME ASSIMÉTRICO

Ao contrário do que se passa nos tipos de moléculas que estudámos até aqui, não existe, neste caso, solução da equação de Schrödinger aplicada ao modelo do rótor rígido.

A dificuldade pode, no entanto, ser ultrapassada, mediante a adopção de uma aproximação, ou, ainda, pela aplicação de métodos dedutivos da função de partição que não requeiram o conhecimento explícito dos valores próprios do hamiltoniano.

A aproximação mencionada consiste em tratar o problema de uma molécula de cume assimétrico como se esta se tratasse de uma molécula de cume simétrico. Nomeadamente, atendendo a que, em muitas moléculas daquele tipo, $B_o \sim C_o$, as expressões de Z_r e das funções termodinâmicas serão idênticas às obtidas no parágrafo anterior, tendo apenas como única diferença, o facto de os valores de u e de α virem agora

$$u = \frac{\sqrt{B_o C_o h}}{kT} \quad (53)$$

e

$$\alpha = 1 - \frac{\sqrt{B_o C_o}}{A_o} \quad (54);$$

isto é, substitui-se B_o pela média geométrica entre B_o e C_o.

Todavia, existem moléculas para as quais a aproximação descrita se revela bastante grosseira, na medida em que B_o é substancialmente diferente de C_o. Se assim for é necessário enveredar pela segunda opção.

Stripp e Kirkwood [7] deduziram uma expressão de Z_r apropriada para moléculas de cume assimétrico, a qual se reduz à equação (48) quando $B_o = C_o$:

$$Z_r = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\pi}{A_o B_o C_o} \left(\frac{kT}{h} \right)^3 \right]^{1/2} \left(1 + \frac{1}{12} \beta t + \frac{1}{480} \gamma t^2 \right) \quad (55),$$

onde C_o é a constante rotacional correspondente a I_v para $v = 0$,

$$\beta = 2 A_o + 2 B_o + 2 C_o - \frac{A_o B_o}{C_o} - \frac{B_o C_o}{A_o} - \frac{C_o A_o}{B_o} \quad (56),$$

$$\gamma = 10 \left(A_o^2 + B_o^2 + C_o^2 \right) + 12 \left(A_o B_o + B_o C_o + C_o A_o \right) - 12 \left(\frac{A_o^2 B_o + A_o B_o^2}{C_o} + \frac{B_o^2 C_o + B_o C_o^2}{A_o} + \frac{C_o^2 A_o + C_o A_o^2}{B_o} \right) + 7 \left(\frac{A_o^2 B_o^2}{C_o^2} + \frac{B_o^2 C_o^2}{A_o^2} + \frac{C_o^2 A_o^2}{B_o^2} \right) \quad (57)$$

e

$$t = \frac{h}{kT} \quad (58).$$

Com base em (55) podemos, pois, obter as expressões termodinâmicas. Tal como no caso precedente, os cálculos por nós efectuados também aqui revelaram ligeiramente favorável a via da derivada directa do ln Z_r. Vem então

$$\left(\frac{E}{NkT}\right)_r = \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{12}\beta t - \frac{1}{240}\gamma t^2}{1 + \frac{1}{12}\beta t + \frac{1}{480}\gamma t^2} \qquad (59),$$

$$\left(\frac{A}{NkT}\right)_r = \ln\sigma - \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\pi}{A_o B_o C_o}\left(\frac{kT}{h}\right)^3\right] - \ln\left(1 + \frac{1}{12}\beta t + \frac{1}{480}\gamma t^2\right) \qquad (60)$$

e

$$\left(\frac{C_v}{Nk}\right)_r = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{240}\gamma t^2 \frac{1}{2880}\beta\gamma t^3 + \frac{1}{115200}\gamma^2 t^4}{1 + \frac{1}{6}\beta t + \left(\frac{1}{240}\gamma + \frac{1}{144}\beta\right)t^2 + \frac{1}{2880}\beta\gamma t^3 + \frac{1}{230400}\gamma t^4} \qquad (61).$$

Como é fácil verificar, para temperaturas suficientemente altas obtêm-se os valores clássicos de $(E/NkT)_r$ e de $(C_v/Nk)_r$.

2.6 — CONTRIBUIÇÃO DA DISTORÇÃO CENTRIFUGA

O método de obtenção das expressões termodinâmicas para este caso é análogo ao que estudámos no § 2.5. Apenas há a referir ligeiras alterações de carácter matemático, que não valerá a pena discutir, até porque facilmente se podem encontrar na literatura indicada.

2.6.1 — MOLÉCULAS LINEARES

Os níveis de energia do rótor não-rígido são dados por

$$\varepsilon_r = B_o h J (J+1) - D_o h J^2 (J+1)^2 \qquad (62),$$

sendo D_o a constante de distorção centrífuga para $v = 0$. A degenerescência de cada nível rotacional continua a ser igual a $2J + 1$.

McDowell [8], baseado no último termo do segundo membro de (62) (que dá conta da distorção centrífuga) e aplicando o tratamento referido, chegou a

$$\ln Z_{dc} = 1 + 2rT + 12r^2 T^2 + 120 r^3 T^3 \qquad (63),$$

onde

$$r = \frac{k D_o}{h B_o^2} \qquad (64).$$

Os termos omissos na equação (63) são desprezáveis mesmo a temperaturas altas pois o valor de r é bastante pequeno ($\sim 10^{-6} K^{-1}$).

As propriedades termodinâmicas foram também calculadas segundo o processo usual (neste caso, desenvolvendo em série e derivando), chegando-se a

$$\left(\frac{E}{NkT}\right)_{dc} = 2rT + 20 r^2 T^2 + 296 r^3 T^3 \qquad (65),$$

$$\left(\frac{A}{NkT}\right)_{dc} = -2rT - 10 r^2 T^2 - \frac{296}{3} r^3 T^3 \qquad (66)$$

e

$$\left(\frac{C_v}{Nk}\right)_{dc} = 4rT + 60 r^2 T^2 + 1184 r^3 T^3 \qquad (67).$$

2.6.2 — MOLÉCULAS DE CUME SIMÉTRICO

Para moléculas de cume simétrico

$$\varepsilon_r = B_o h J (J+1) + (A_o - B_o) h K^2 - D_J h J^2 (J+1)^2 - D_{JK} h J (J+1) K^2 - D_K h K^4 \qquad (68),$$

representando D_J, D_{JK} e D_K as constantes de distorção centrífuga.

Igualmente para este caso McDowell [8] chegou às equações de $\ln Z_{dc}$ e das propriedades termodinâmicas, tendo como ponto de partida os três últimos termos do segundo membro da equação (68):

$$\ln Z_{dc} = \rho_1 T + \frac{1}{2}\left(2\rho_2 - \rho_1^2\right)T^2 \qquad (69),$$

$$\left(\frac{E}{NkT}\right)_{dc} = \rho_1 T + \left(2\rho_2 - \rho_1^2\right)T^2 \qquad (70),$$

$$\left(\frac{A}{NkT}\right)_{dc} = -\rho_1 T - \frac{1}{2}\left(2\rho_2 - \rho_1^2\right)T^2 \qquad (71)$$

e

$$\left(\frac{C_v}{Nk}\right)_{dc} = 2\rho_1 T + 3\left(2\rho_2 - \rho_1^2\right)T^2 \qquad (72),$$

sendo

$$\rho_1 = \frac{k}{4 h B_o^2}\left[(8 + 4m + 3m^2) D_J + (2m + 3m^2) D_{JK} + 3m^2 D_K\right] \qquad (73),$$

$$\rho_2 = \frac{3k^2}{32 h^2 B_o^4}\left[(128 + 64m + 48m^2 + 40m^3 + 35m^4) D_J^2 + 2(16m + 24m^2 + 30m^3 + 35m^4) D_J D_{JK} + 2(8m^2 + 20m^3 + 35m^4)(D_J D_K + \frac{1}{2}D_{JK}^2) + 2(10m^3 + 35m^4) D_{JK} D_K + 35m^4 D_K^2\right] \qquad (74)$$

e

$$m = \frac{B_o}{A_o} \qquad (75).$$

2.6.3 — MOLÉCULAS DE CUME ASSIMÉTRICO

Como vimos no § 2.5.3, a contribuição rotacional para as funções termodinâmicas de moléculas de cume assimétrico não pode ser estudada pelos métodos usuais (uma vez que não existe solução da equação de Schrödinger aplicada ao modelo do rótor rígido), passando-se o mesmo com respeito ao problema da distorção centrífuga.

Uma maneira de resolver esta questão, ou seja, de calcular o efeito da distorção centrífuga nas propriedades termodinâmicas das moléculas em estudo, será a de adoptar um tratamento baseado na via clássica. Concretamente, o assunto pode ser abordado encarando o problema do rótor não-rígido através da Mecânica Clássica.

Esta aproximação foi realizada por Wilson [10], que assim conseguiu obter uma expressão de Z_{dc} :

$$Z_{dc} = 1 + \rho' T \qquad (76)$$

onde ρ' é uma função das constantes de força da molécula (τ) e tem normalmente um valor da ordem de $10^{-5}\,K^{-1}$:

$$\rho' = -\frac{1}{4} k \Big(3\tau_{xxxx} A_o^2 + 3\tau_{yyyy} B_o^2 + 3\tau_{zzzz} C_o^2 + 2\tau_{xxyy} A_o B_o + 2\tau_{yyzz} B_o C_o + 2\tau_{zzxx} C_o A_o + 4\tau_{xyxy} A_o B_o + 4\tau_{yzyz} B_o C_o + 4\tau_{xzxz} C_o A_o \Big) \qquad (77).$$

De (76) Wilson tirou as expressões termodinâmicas desenvolvendo o ln Z_{dc} em série e derivando. Chegou a

$$\left(\frac{E}{NkT}\right)_{dc} = \rho' T \qquad (78),$$

$$\left(\frac{A}{NkT}\right)_{dc} = -\rho' T \qquad (79)$$

e

$$\left(\frac{C_v}{Nk}\right)_{dc} = 2\rho' T \qquad (80).$$

2.7 — CONTRIBUIÇÃO DA ANARMONICIDADE

Os níveis de energia do oscilador anarmónico linear são dados por

$$\varepsilon_v = \sum_i \left(v_i + \frac{d_i}{2}\right) h\nu_i + \sum_i \left(v_i + \frac{d_i}{2}\right) x_{ii} h\nu_i + \sum_{i<j} \left(v_i + \frac{d_i}{2}\right)\left(v_j + \frac{d_j}{2}\right) x_{ij} h^2 \nu_i \nu_j + \ldots \qquad (81),$$

onde os dois últimos termos do segundo membro, através das chamadas constantes de anarmonicidade, x_{ii} e x_{ij} , dão conta deste fenómeno. Tal como no § 2.4, os somatórios estendem-se ao número de frequências.

O processo de tratar o problema, de modo a obtermos expressões de ln Z_a e das propriedades termodinâmicas é análogo ao utilizado nos parágrafos anteriores. A diferença é que, neste caso, ele se revela muito mais trabalhoso.

Woolley [11], com base em (81), chegou a uma expressão de ln Z_a onde apresenta, não só vários termos respeitantes às constantes x_{ii} e x_{ij} , como também termos devidos às constantes de anarmonicidade de maior ordem (omissos na equação (81)). Na prática, alguns dos termos de Woolley têm uma contribuição desprezável, pelo que podemos eliminá-los. Por maioria de razão, as mencionadas constantes de ordem superior terão uma contribuição ainda menor, para além de que, para a quase totalidade das moléculas, os seus valores não se encontram determinados.

Pennington e Kobe [9] abordaram também este problema, embora a expressão final a que chegaram contenha apenas os dois primeiros termos dados por Woolley (que são, no entanto, os de maior peso).

A equação de ln Z_a que vamos utilizar é, pois, a de Woolley, reduzida aos termos de maior importância. Alterámos, porém, a sua forma, mediante o emprego de funções ${}^n\varphi$, definidas por Pennington e Kobe, as quais nos facilitaram grandemente a obtenção das relações termodinâmicas e os próprios cálculos. Tem-se então:

$$\ln Z_a = \sum_{i<j} \Big\{ \frac{1}{2} X_{ii} d_i (d_i + 1)\, {}^4\varphi_i + X_{ij} d_i d_j\, {}^7\varphi_i\, {}^7\varphi_j \Big\} + \sum_{i<j<k} \Big\{ X_{ii}^2 d_i (d_i + 1)\, {}^2\varphi_i \Big[{}^2\varphi_i + (d_i + 1)\, {}^1\varphi_i \Big] + \frac{1}{2} X_{ij}^2 d_i d_j \Big[{}^2\varphi_i\, {}^2\varphi + \frac{1}{2} d_i\, {}^4\varphi_i\, {}^2\varphi_j + \frac{1}{2} d_j\, {}^4\varphi_j\, {}^2\varphi_i \Big] + X_{ij} X_{ik} d_i d_j d_k\, {}^2\varphi_i\, {}^7\varphi_j\, {}^7\varphi_k \Big\} + \sum_{i \neq j} \Big\{ 2 X_{ii} X_{ij} d_i (d_i + 1)\, d_j\, {}^7\varphi_i\, {}^2\varphi_i\, {}^7\varphi_j \Big\} \qquad (82),$$

$$\left(\frac{E}{NkT}\right)_a = \sum_{i<j} \Big\{ \frac{1}{2} X_{ii} d_i (d_i + 1)\, {}^5\varphi_i + X_{ij} d_i d_j\, {}^7\varphi_i\, {}^7\varphi_j\, ({}^8\varphi_i + {}^8\varphi_j) \Big\} + \sum_{i<j<k} \Big\{ X_{ii}^2 d_i (d_i + 1)\, ({}^3\varphi_i - {}^2\varphi_i) \Big[{}^4\varphi_i + (d_i + 1)\, {}^4\varphi_i \Big] + X_{ii}^2 d_i (d_i + 1)\, {}^2\varphi_i \Big[{}^3\varphi_i - {}^2\varphi_i + (d_i + 1)\, {}^5\varphi_i \Big] + \frac{1}{2} X_{ij}^2 d_i d_j \Big[({}^3\varphi_i - {}^2\varphi_i)\, {}^2\varphi_j + {}^2\varphi_i ({}^3\varphi_j - {}^2\varphi_j) + \frac{1}{2} d_j\, {}^5\varphi_i\, {}^2\varphi_j + \frac{1}{2} d_i\, {}^4\varphi_i ({}^3\varphi_j - {}^2\varphi_j) + \frac{1}{2} d_j\, {}^5\varphi_j\, {}^2\varphi_i + \frac{1}{2} d_j\, {}^4\varphi_j ({}^3\varphi_i - {}^2\varphi_i) \Big] +$$

$$+ X_{ij} X_{ik} d_i d_j d_k \Big[({}^3\varphi_i - {}^2\varphi_i)\, {}^7\varphi_i\, {}^7\varphi_k + {}^2\varphi_i\, {}^7\varphi_j\, {}^8\varphi_j$$

$${}^7\varphi_k + {}^2\varphi_i\, {}^7\varphi_j\, {}^7\varphi_k\, {}^8\varphi_k \Big]\Big\} + \sum_{i \neq j} \Big\{ 2 X_{ii} X_{ij} d_i (d_j + 1)$$

$$d_j \Big[{}^7\varphi_i\, {}^8\varphi_i\, {}^2\varphi_i\, {}^7\varphi_j + {}^7\varphi_i ({}^3\varphi_i - {}^2\varphi_i)\, {}^7\varphi_j +$$

$$+ {}^7\varphi_i\, {}^2\varphi_i\, {}^7\varphi_j\, {}^8\varphi_j \Big]\Big\} \qquad (83),$$

$$\left(\frac{A}{NkT} \right)_a = - \ln Z_a \qquad (84)$$

e

$$\left(\frac{C_v}{Nk} \right)_a = \sum_{i<j} \Big\{ \frac{1}{2} X_{ii}\, d_i (d_i + 1)\, {}^6\varphi_i + X_{ij} d_i d_j$$

$${}^7\varphi_i\, {}^7\varphi_j \Big[({}^8\varphi_i + {}^8\varphi_j)^2 + {}^{10}\varphi_i + {}^{10}\varphi_j - 1 \Big]\Big\} +$$

$$+ \sum_{i<<k} \Big\{ X_{ii}^2\, d_i (d_i + 1)\, {}^{12}\varphi_i \Big[{}^2\varphi_i + (d_i + 1)\, {}^4\varphi_i \Big] +$$

$$+ X_{ii}^2\, d_i (d_i + 1)\, {}^2\varphi_i \Big[{}^{12}\varphi_i + (d_i + 1)\, {}^6\varphi_i \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} X_{ij}^2\, d_i d_j \Big[{}^{12}\varphi_i\, {}^2\varphi_j + {}^2\varphi_i\, {}^{12}\varphi_j + \frac{1}{2} d_i ({}^6\varphi_i$$

$${}^2\varphi_j + {}^4\varphi_i\, {}^{12}\varphi_j) + \frac{1}{2} d_j ({}^6\varphi_j\, {}^2\varphi_i + {}^4\varphi_j\, {}^{12}\varphi_i) \Big] +$$

$$+ X_{ij} X_{ik} d_i d_j d_k \Big[{}^{12}\varphi_i\, {}^7\varphi_j\, {}^7\varphi_k + {}^2\varphi_i\, {}^7\varphi_i\, {}^7\varphi_k (({}^8\varphi_j +$$

$$+ {}^8\varphi_k)^2 + {}^{10}\varphi_j + {}^{10}\varphi_k - 1) \Big]\Big\} + \sum_{i \neq j} \Big\{ 2 X_{ii} X_{ij}\, d_i$$

$$(d_i + 1)\, d_j \Big[{}^{12}\varphi_i\, {}^7\varphi_j\, {}^7\varphi_i + {}^2\varphi_i\, {}^7\varphi_i\, {}^7\varphi_j (({}^8\varphi_i + {}^8\varphi_j)^2$$

$$+ {}^{10}\varphi_i + {}^{10}\varphi_j - 1) \Big]\Big\} \qquad (85),$$

tal que

$$X_{ii} = - \frac{x_{ii}}{r_i} \qquad (86)$$

e

$$X_{ij} = - \frac{x_{ij}}{(r_i\, r_j)^{1/2}} \qquad (87).$$

As funções ${}^n\varphi$ são definidas por

$${}^1\varphi = (e^S - 1)^{-1}$$

$${}^2\varphi = s\, e^S (e^S - 1)^{-2}$$

$${}^3\varphi = s^2 e^S (e^S + 1)\, (e^S - 1)^{-3}$$

$${}^4\varphi = 2 s\, (e^S - 1)^{-2}$$

$${}^5\varphi = 2 s\, (2 s\, e^S - e^S + 1)\, (e^S - 1)^{-3}$$

$${}^6\varphi = 4 s^2 e^{2S} (2 s\, e^S - 2\, e^S + s + 2)\, (e^S - 1)^{-4}$$

$${}^7\varphi = s^{1/2} (e^S - 1)^{-1}$$

$${}^8\varphi = \frac{1}{2} (2 s\, e^S - e^S + 1)\, (e^S - 1)^{-1}$$

$${}^{11}\varphi = s^2 e^S (e^S - 1)^{-2}$$

$${}^{10}\varphi = s\, (e^S - 1)^{-1}$$

$${}^{11}\varphi = - \ln (1 - e^{-S})$$

$${}^{12}\varphi = s^2 e^S (- 2\, e^{2S} + s\, e^{2S} + 4 s\, e^S + 2 +$$

$$+ s)\, (e^S - 1)^{-4} \qquad (88),$$

onde s é dado por

$$s = \frac{h\nu}{kT} \qquad (89).$$

2.8 — CONTRIBUIÇÃO DA INTERACÇÃO ROTAÇÃO-VIBRAÇÃO

Se uma molécula passa do estado fundamental de vibração para um estado excitado, a distância média entre os seus átomos varia. Mais precisamente, se r_0 representar a referida distância para $v = 0$ e r_v es reportar a um nível energético mais elevado, tem-se que $r_v > r_0$. Sendo assim, para os momentos de inércia verificar-se-á a relação $I_v > I_0$; e, para as constantes rotacionais, será, por exemplo, $B_v < B_0$.

É precisamente neste fenómeno que consiste a interacção rotação-vibração. A variação de B com o número quântico vibracional pode traduzir-se pela expressão

$$B_v = B_0 \left(1 - \sum_i b_i\, v_i \right) \qquad (90),$$

estendendo-se o somatório ao número de frequências da molécula e sendo b_i dado por

$$b_i = \frac{\alpha_i^B}{B_0} \qquad (91);$$

α_i^B são as chamadas constantes de interacção rotação-vibração[6].

Introduzindo as equações do tipo de (90) — para A_v, B_v e C_v — nas expressões do rótor rígido e através de um tratamento adequado, Pennington e Kobe [9] lograram obter expressões da contribuição em estudo para vários tipos de moléculas. Chegaram a

$$\ln Z_{rv} = \sum_i d_i\, r_i\, {}^1\varphi_i \qquad (92),$$

onde o número de termos do somatório iguala o número de frequências r_i é função de a_i, b_i e c_i e a relação que o traduz varia consoante o comportamento rotacional da molécula. Assim, para moléculas lineares,

(6) Para as constantes rotacionais A e C existem relações idênticas a (90 e a (91), definindo-se as grandezas $a_i = \alpha_i^A / A_0$ e $c_i = \alpha_i^C / C_0$

$$r_i = b_i + b_i^2 \qquad (93);$$

para moléculas de cume simétrico

$$r_i = b_i + \frac{a_i}{2} + b_i^2 + \frac{a_i\, b_i}{2} + \frac{3\, a_i^2}{8} \qquad (94);$$

para moléculas de cume assimétrico

$$r_i = \frac{a_i + b_i + c_i}{2} + \frac{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2}{4} + \frac{(a_i + b_i + c_i)^2}{8} \qquad (95).$$

As contribuições para as propriedades termodinâmicas vêm então dadas por

$$\left(\frac{E}{NkT}\right)_{dc} = \sum_i d_i\, r_i\, {}^2\varphi_i \qquad (96),$$

$$\left(\frac{A}{NkT}\right)_{dc} = -\sum_i d_i\, r_i\, {}^1\varphi_i \qquad (97)$$

e

$$\left(\frac{C_v}{Nk}\right)_{dc} = \sum_i d_i\, r\, \varphi_i \qquad (98).$$

d_i é, como vimos, a degenerescência da frequência ν_i; as funções ${}^n\varphi$ são definidas do modo apontado no parágrafo anterior.

3. — CÁLCULOS

Vamos agora ilustrar a teoria estudada através da determinação de calores específicos e de entropias molares para as moléculas de CO_2 (linear), NH_3 (cume simétrico) e SO_2 (cume assimétrico).

Os cálculos foram realizados no computador do Centro de Cálculo da Universidade Técnica de Lisboa, após a elaboração de programas em Fortran IV para os casos apontados. Cada um destes programas permite obter separadamente todas as contribuições analisadas para as energias interna e de Helmholtz, para a entropia e para o calor específico a volume constante.

Os valores selecionados para os cálculos são apresentados nas tabelas I e II. Não houve possibilidade de obter dados das constantes de anarmonicidade do NH_3 e das constantes de interacção rotação-vibração do SO_2. Por outro lado, a contribuição da distorção centrífuga para esta última molécula deve considerar-se como uma aproximação grosseira, uma vez que também desconhecemos o valor correcto de ρ' (embora saibamos, no entanto, que ele é da ordem de $10^{-5}\,K^{-1}$).

Na tabela III mostram-se os valores das várias contribuições para o C_v das três moléculas mencionadas, a algumas temperaturas. Na tabela IV comparam-se os valores calculados (somatórios de todas as contribuições) com resultados experimentais de C_v e de S (a p = 1 atm).

4. — CONCLUSÕES

Como se pode observar na tabela IV, a concordância entre os valores é muito satisfatória. Apenas para o NH_3, à temperatura de 300 K, se manifesta um desvio de cerca de 3 % em relação ao valor experimental; no entanto, para T = 500 K o erro baixa para 1 %. Assim, é lícito supor que a origem da discrepância reside no facto de termos considerado válido o modelo do gás perfeito, o que será, neste caso, pouco correcto, devido à possível presença de interacções moleculares significativas.

Da tabela III pode inferir-se que a importância das contribuições devidas à anarmonicidade, à interacção rotação-vibração e à distorção centrífuga só se tornam significativas a altas temperaturas. Com o objectivo de darmos uma imagem mais clara do fenómeno, elaborámos os gráficos da figura 2, onde se mostra a variação com a temperatura de cada uma das contribuições para o valor global de C_v.

Pela análise das diferentes contribuições termodinâmicas verifica-se que todas elas são função da temperatura, à excepção de Z_t, que é também função do volume, devido a estar intimamente relacionado com os graus de liberdade externos. As contribuições devidas a graus de liberdade internos são, assim, apenas função da temperatura e, evidentemente, das propriedades de cada molécula.

Desejamos finalmente acentuar que o cálculo teórico de propriedades termodinâmicas com base em dados espectroscópicos pode ser realizado de um modo ainda mais sofisticado, ou seja, é possível entrar-se com um maior número de contribuições. É o caso, por exemplo, das ressonâncias de Fermi e de Darling-Dennison [13], do efeito de anromonicidade na rotação, etc. Contudo, os seus valores são de tal modo desprezáveis que, para uma previsão de uma propriedade experimental, não merece a pena tê-los em atenção — para além de o cálculo ser relativamente complexo.

Pretendeu-se dar uma visão sobre o cálculo de propriedades termodinâmicas do gás perfeito, entrando em linha de conta com os fenómenos moleculares mais relevantes. Dada a actual acessibilidade do cálculo computacional e as modernas exigências do processo tecnológico e sua optimização, pareceu-nos da maior importância desenvolver estes cálculos, fornecendo ao mesmo tempo um contributo para o estudo da termodinâmica molecular no I. S. T.

REFERÊNCIAS

1 — G. S. RUSHBROOKE, Statistical Mechanics, Oxford Un. Press, London, 1967.

2 — L. PAULING, E. B. WILSON, Introduction to Quantum Mechanics, McGraw-Hill, Tokyo, 1935.

3 — T. L. HILL, Statistical Thermodynamics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960.

4 — J. B. DENCE, J. Chem. Ed., *49*, 798 (1972).

5 — I. E. VINEY, Proc. Cambr. Phil. Soc., *29*, 142 (1933).

6 — I. E. VINEY, ibid., *29*, 407 (1933).

7 — K. F. STRIPP, J. G. KIRKWOOD, J. Chem. Phys., *19*, 1131 (1951).

8 — R. S. McDOWELL, J. Chem. Phys., *39*, 526 (1963).

9 — R. E. PENNINGTON, K. A. KOBE, J. Chem. Phys., *22*, 1442 (1954).

10 — E. B. WILSON, J. Chem. Phys., *4*, 526 (1936).

11 — H. W. WOOLLEY, J. Res. Natl. Bur. Standards, *56*, 105 (1956).

12 — T. SHIMANOUCHI, Tables of Molecular Vibrational Frequencies, Vol I, Natl. Bur. of Standards, Washington (1972).

13 — H. W. WOOLLEY, J. Res. Natl. Bur. Standards, *54*, 299 (1955).

14 — R. D. SHELTON, A. H. NIELSEN, J. Chem. Phys., *21*, 2178 (1953).

15 — G. HERZBERG, Molecular Structure and Molecular Spectra, Vol. III, Van Nostrand, N. Y., 1966.

16 — F. DIN, Thermodynamic Functions of Gases, Vol 1, Butterworths, London, 1956.

17 — M. Kh. KARAPET'YANTS, M. K. KARAPET'YANTS Thermodynamic Constants of Inorganic and Organic Compounds, Ann Arbor-Humphrey Sci. Pub., London, 1970.

AGRADECIMENTO

Queremos expressar o nosso agradecimento ao Prof. J. C. G. Calado, que despertou em nós o interesse pelo estudo da Termodinâmica Molecular, permitindo assim o desenvolvimento da nossa formação neste domínio da Ciência. Estamos também gratos ao Eng. V. A. Meira Soares pelas suas valiosas sugestões, bem como ao C. C. U. L. pelas facilidades de computação concedidas.

TABELA I

	ν_i /cm^{-1} (a)	d_i	x_{ii} /cm^{-1} (b)	x_{ij} /cm^{-1} (b)	α_i^A /cm^{-1} (c)	α_i^B /cm^{-1} (c)	α_i^C /cm^{-1} (c)
CO_2	$\nu_1 = 1333$	1	$x_{11} = -2.20$	$x_{12} = 3.76$	—	$\alpha_1 = 0.00121$	—
	$\nu_2 = 667$	2	$x_{22} = -0.75$	$x_{13} = -18.54$	—	$\alpha_2 = -0.00072$	—
	$\nu_3 = 2349$	1	$x_{33} = -12.46$	$x_{23} = -12.48$	—	$\alpha_3 = 0.00309$	—
NH_3	$\nu_1 = 3337$	1	?	?	—	$\alpha_1 = 0.177$	$\alpha_1 = 0.037$
	$\nu_2 = 950$	1	?	?	—	$\alpha_2 = 0.015$	$\alpha_2 = 0.098$
	$\nu_3 = 3444$	2	?	?	—	$\alpha_3 = 0.176$	$\alpha_3 = -0.009$
	$\nu_4 = 1627$	2	?	?	—	$\alpha_4 = -0.230$	$\alpha_4 = 0.068$
SO_2	$\nu_1 = 1151$	1	$x_{11} = -3.99$	$x_1 = -2.05$	?	?	?
	$\nu_2 = 518$	1	$x_{22} = -3.00$	$x_{13} = -13.71$	?	?	?
	$\nu_3 = 1362$	1	$x_{33} = -5.17$	$x_{23} = 0.390$	?	?	?

TABELA II

	A_o /cm^{-1} (d)	B_o /cm^{-1} (d)	C_o /cm^{-1} (d)	$D_o \times 10^4$ /cm^{-1} (e)	σ	M/g
CO_2	—	0.39021	—	$13.5 \times 10_{-4}$	2	44.011
NH_3	—	9.4443	6.196	$D_J = 8.11$ $D_{JK} = -15.1$ $D_K = 7.20$	3	17.032
SO_2	2.02736	0.34417	0.293535	—	2	64.06

(a) Valores de [12]

(b) Para o CO_2 valores de [13]; para o SO_2 valores de [14]

(c) Valores de [5]

(d) Valores de [15]

(e) Para o CO_2 valores de [15]; para o NH_3 valores de [8]

TABELA III

	T/K	$[(C_v)_t + (C_v)_r + (C\ )]_v/Nk$	$(C_v/Nk)_{rv}$	$(C_v/Nk)_{dc}$	$(C_v/Nk)_a$	C_v/Nk
CO_2	100	2.5125	-2.3×10^{-5}	0.0002	~ 0	2.513
	273.16	3.3262	− 0.0014	0.0007	0.0008	3.326
	500	4.3693	− 0.0022	0.0012	0.0041	4.372
	2000	6.1813	0.0003	0.0050	0.0773	6.264
NH_3	100	3.0003	2.1×10^{-6}	0.0027	?	3.003
	273.16	3.1982	0.0011	0.0076	?	3.207
	500	3.9850	− 0.0014	0.0142	?	3.998
	2000	7.6083	0.0085	0.0644	?	7.681
SO_2	100	3.0322	?	~ 0.0030	~ 0	3.035
	273.16	3.6821	?	~ 0.0055	0.0038	3.691
	500	4.5817	?	~ 0.0100	0.0172	4.609
	2000	5.8570	?	~ 0.0400	0.1304	6.027

TABELA IV

	T/K	$S/cal\ mole^{-1}\ K^{-1}$		$C_p/cal\ mole\ K^{-1}$	
		exp. (a)	calc.	exp. (a)	calc.
CO_2	293.16	50.864	50.920	8.978	8.824
	373.16	53.104	53.147	9.638	9.642
NH_3	300	45.99	46.197	8.786	8.509
	500	50.70	50.862	10.035	9.932
SO_2	298.16	59.296	59.293	9.514	9.528

(a) Para o CO_2 e NH_3 valores de [16]; para o SO_2 valores de [17].

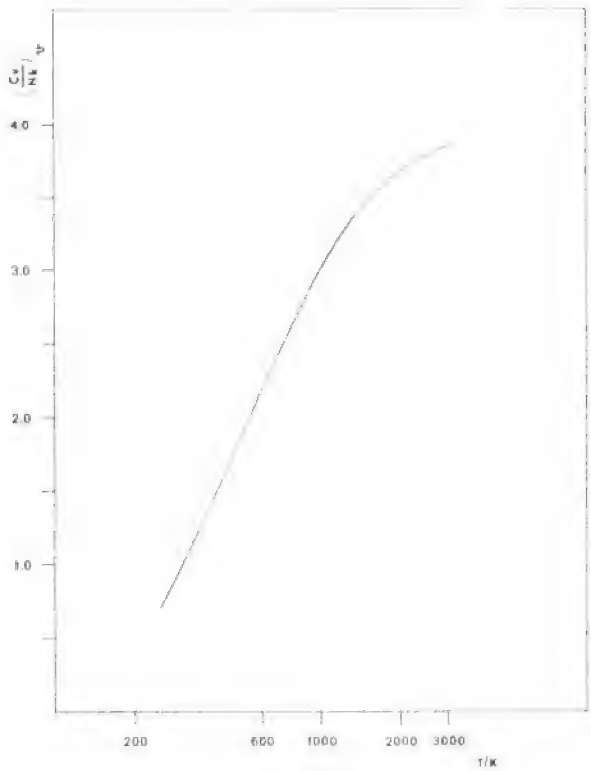


Fig. 2 a

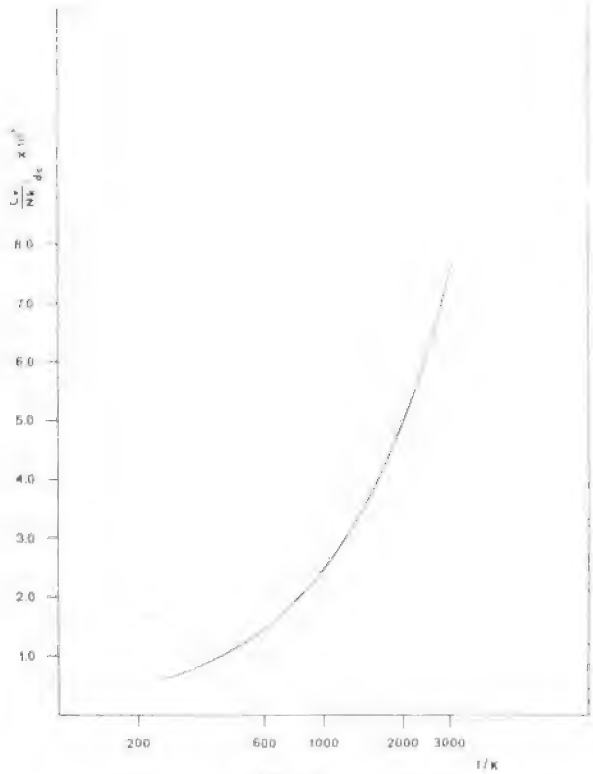


Fig. 2 c

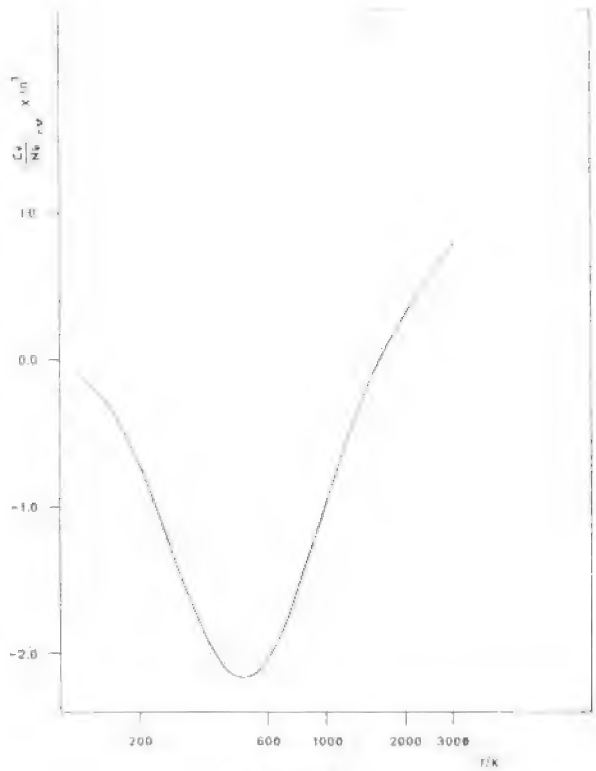


Fig. 2 b

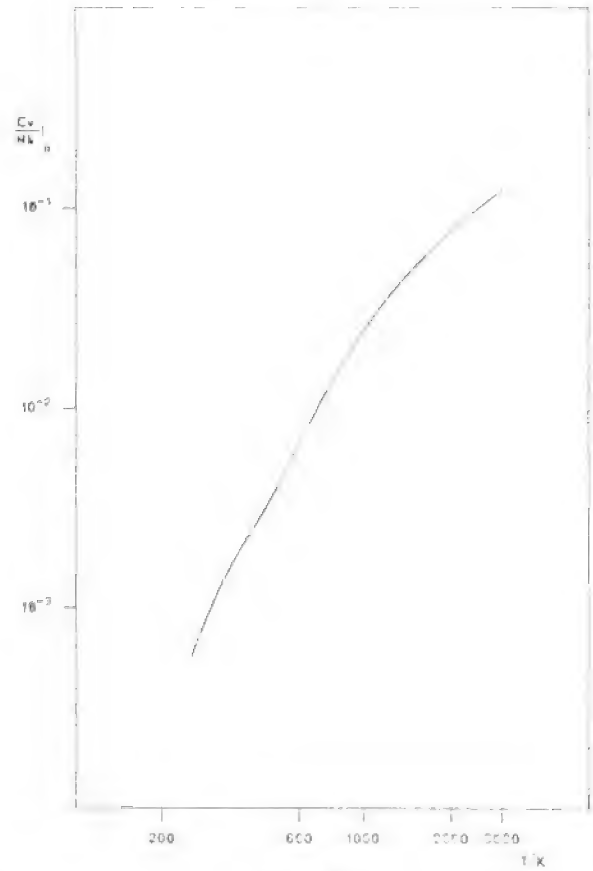


Fig. 2 d

Fig. 2 — Contribuições para o C_p do CO_2

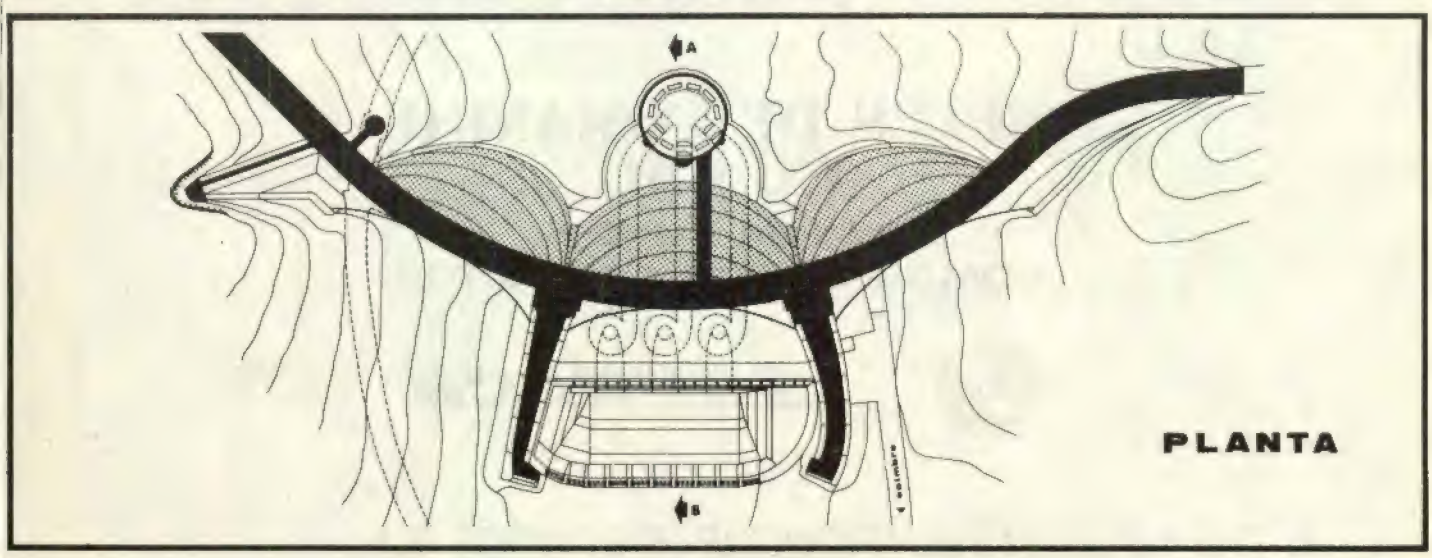
(a) Oscilador harmónico linear
(b) Interacção rotação-vibração
(c) Distorção centrífuga
(d) Anarmonicidade

BARRAGEM DA AGUEIRA

COMPANHIA PORTUGUESA DE ELECTRICIDADE

Construções Técnicas ergue no Mondego, esta barragem de abóbodas múltiplas, com 80 metros de altura e 350 metros de comprimento, que inundará uma área de 2 000 hectares.

Serão executados 350 000 m³ de escavações, utilizados 450 000 m³ de betão e 10 000 toneladas de aço.



uma empresa a responder às necessidades do País

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, S.A.R.L.

AV. 24 JULHO, 24 • TEL. 690172 - 691302 - 690163 • LISBOA - 2

RELÉS DE COMANDO
CC E AC

DE 1·2·4·5 e 10 A
COM 1·2·3·4 e 6 CONTACTOS

SCHRACK

ELECTROTÉCNICOS REUNIDOS Lda.
av. duque de ávila, 66-3º lisboa portugal

C. D. U. 627.31

Orientação do projecto de docas secas (Estaleiro naval da Setenave, Setúbal)

J. M. Gonçalves Figueira (1)

RESUMO

Mencionam-se os actuais condicionamentos relativos ao projecto de docas secas para construção e para reparações navais, com enfase nos imperativos da sua integração em estaleiros orientados como verdadeiras unidades industriais. Descreve-se sucintamente a orientação seguida no projecto das docas do novo estaleiro português em acabamento no estuário do Sado, Setúbal.

SUMMARY

The main conditions governing shipbuilding and shiprepairing dry docks design is mentioned. Emphasis is put on the requirements for integration of these docks in shipyard projects conceived as high productive industrial units.

Procedures adopted for the dry docks design at the new shipyard at the Setubal estuary (Portugal) are reported.

1 — Dez ou vinte anos atrás, ainda algumas administrações portuárias consideravam as docas secas como «obras públicas», que qualquer um poderia utilizar mediante o pagamento de taxas por uma ocupação avulsa. As docas secas serviam apenas para a conservação e reparação dos navios, já que a construção de novos cascos ainda se fazia em carreiras e não em docas atribuídas, exclusivamente ou não, a essa actividade, como hoje é prática corrente, pelo menos, para navios de grande porte.

Uma acentuada competividade e uma óptica industrial cada vez mais presentes nas actividades da construção e da reparação navais, as possibilidades do recurso a equipamentos de elevado custo inicial e uma melhor compreensão dos benefícios do trabalho organizado condenam hoje tudo o que não seja uma boa integração das docas secas em conjuntos sistematizados englobando as oficinas e outros meios indispensáveis para as operações de um estaleiro completo. As docas deixaram assim de ser concebidas com um certo cariz de monumento perene, cujos custos e prazos de construção, embora controlados pelos planos e orçamentos de gastos dos dinheiros públicos, não estão sujeitos às duras exigências do mercado.

Os cadernos de encargos a que os promotores da construção de novos estaleiros submetem os projectistas das docas secas obrigam-nos a considerá-las como um equipamento industrial, que como qualquer outro tem de ser rentável e tem de se inserir num sistema operacional cingindo-se a uma economia de conjunto. Como qualquer outro equipamento, embora habitualmente construídas com materiais de duração praticamente ilimitada, o seu custo terá de ser amortizado em curto prazo, pois em poucos anos podem tornar-se absoletas por mutações técnicas, ou dispensáveis por alterações do mercado do transporte marítimo. Os prazos para os estudos e construção das docas são muitas vezes drasticamente influenciados por condições de oportunidade comercial e mutações inesperadas das conjunturas políticas e económicas introduzem factores adicionais de intranquilidade nos que participam na implementação deste tipo de obras. (2)

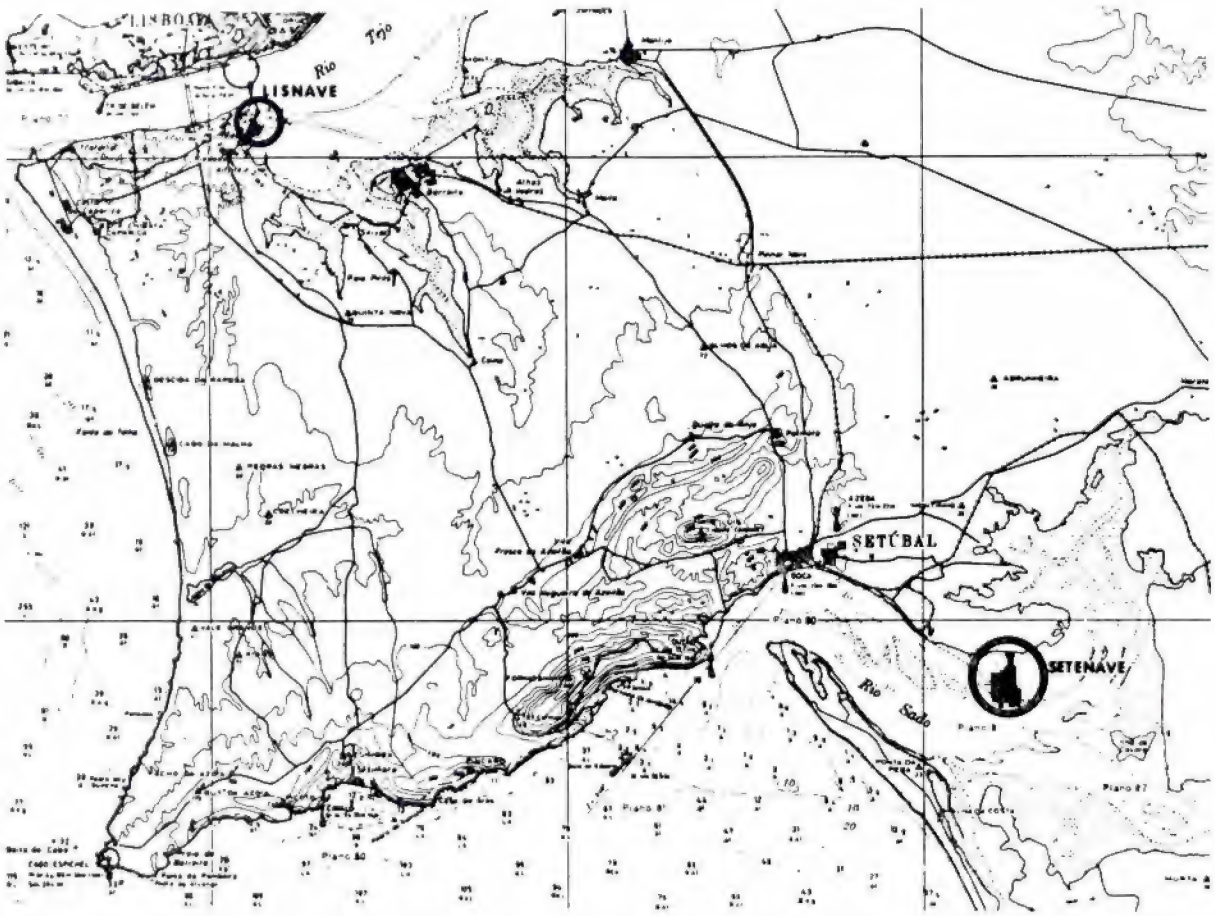
(1) — Engenheiro civil I. S. T., consultor na PROFABRIL — Centro de Projectos — Lisboa.

(2) — No estaleiro da Margueira, operado pela LISNAVE, por três vezes foi alterada durante a construção a largura das docas secas, para atender ao rápido crescimento das dimensões dos navios tanques encomendados a seguir ao encerramento do Canal do Suez. Essas alterações foram possíveis porque a concepção estrutural da secção corrente dessas docas — muros laterais em T invertido independente da laje de fundo — permitia construir grande parte de um dos muros laterais e grande parte do fundo enquanto se aguardava a decisão sobre a posição do segundo muro.

(3) — De 1960 até o início da construção do Estaleiro de Setúbal (1972) o número de graneleiros (navios de mais de 10 000 tdw destinados a graneis líquidos e sólidos) passou de 3042 para 5082, o porte total de 62×10^6 tdw para 258×10^6 tdw, o porte médio de 20 000 para 45 000 tdw.

O crescimento da frota mundial e do porte dos navios e o abandono da construção em «carreiras», especialmente dos graneleiros (3), tem motivado a partir da década de 1960 o estabelecimento de grande número de docas de grandes dimensões. Actualmente estão em operação, em todo o mundo, cerca de vinte docas para navios acima de 300 000 tdw, número que quase duplicará nos próximos dois anos.

túbal), a 45 km a SE de Lisboa destina-se à construção e reparação de navios de grande porte, até 700 000 tdw. Dispõe de 3 docas secas concebidas para funcionarem como um conjunto coeso, integrado no sistema global de produção. Existe uma divisão bem marcada entre um sub-sistema de construção de novos navios e um sub-sistema de reparação, ocupando, respectivamente, a zona W e a zona E do estaleiro. A disposição adoptada



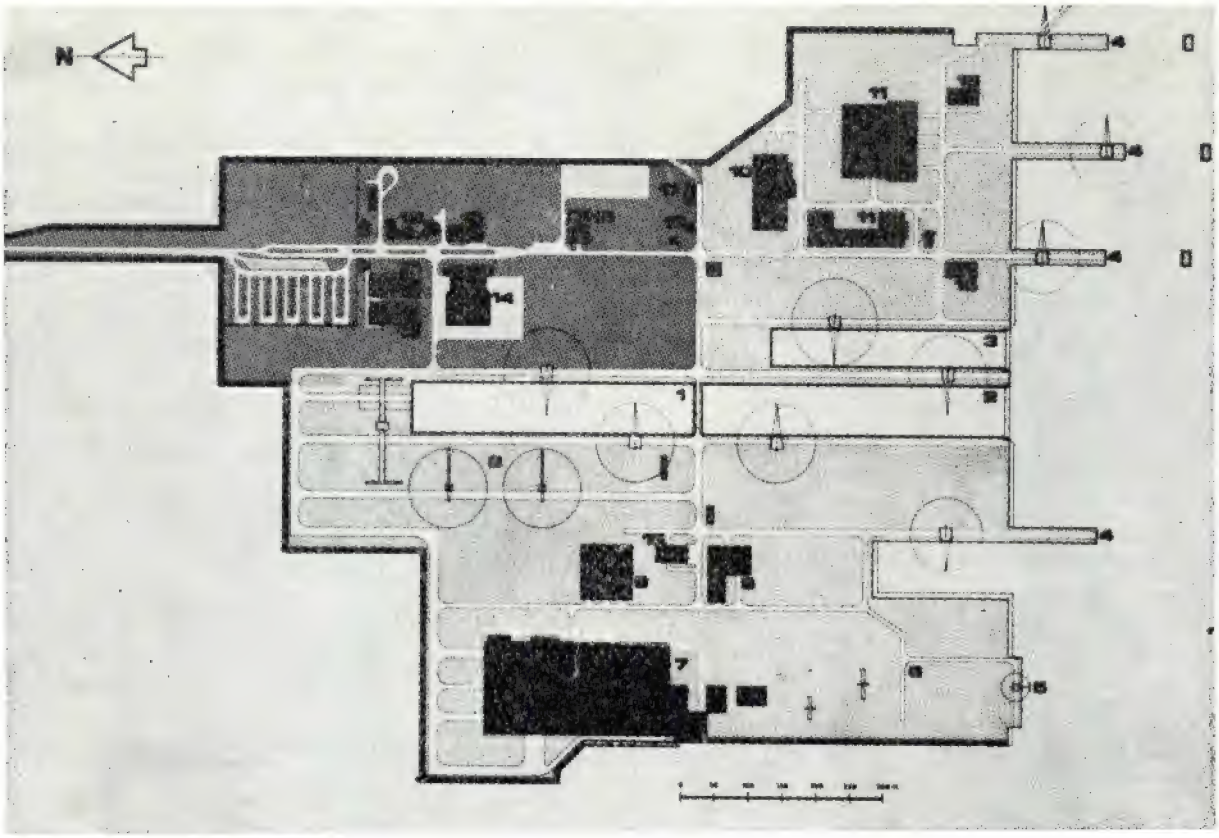
A gravura mostra a península de Setúbal e os estuários do Tejo e do Sado onde se situam os dois estaleiros portugueses para navios de grande porte: LISNAVE, instalado na década de 60 e SETENAVE em acabamento

A situação que se apresenta vem facultando aos projectistas de docas secas um campo de acção vasto e pleno de interesse. Mas impõe-lhes atitudes e procedimentos de profissionalismo, em que engenheiros generalistas e engenheiros especialistas das variadas técnicas têm de trabalhar em equipa com os futuros operadores do conjunto de instalações em que se integra a obra, tirando o melhor partido dos aperfeiçoamentos em cada disciplina, mas subordinando a sua participação a uma concepção técnica de conjunto e aos imperativos de condições de exploração extremamente exigentes quanto a produtividade e oportunidade de oferta de serviços.

2 — O estaleiro que a empresa SETENAVE tem em vias de acabamento no estuário do Sado (Porto de Se-

para o conjunto das docas reflecte o equilíbrio encontrado entre diversos requisitos opostos: especialização de funções e integração em cada um dos sub-sistemas, procura da máxima utilização de meios comuns, minimização de custos da sua própria construção, adaptação e um programa de avanço dessa construção favorável ao programa de conjunto de todas as obras e equipamentos do estaleiro e à lista das primeiras encomendas conseguidas pela empresa promotora, versatilidade de utilização permitindo boas condições de trabalho para várias proporções entre as encomendas de trabalho de construção de novos navios e de trabalho de reparação.

Assim, o conjunto das docas situa-se no meio da área de produção do estaleiro. Duas delas, em seguimento uma da outra, com o mesmo eixo longitudinal, ficam adjacentes à zona das oficinas afectas à constru-



1 Doca de construção
2 Doca de múltipla utilização
3 Doca de reparação
4 Pontes-cais
5 Cais de descargas do aço

ZONA DE CONSTRUÇÃO

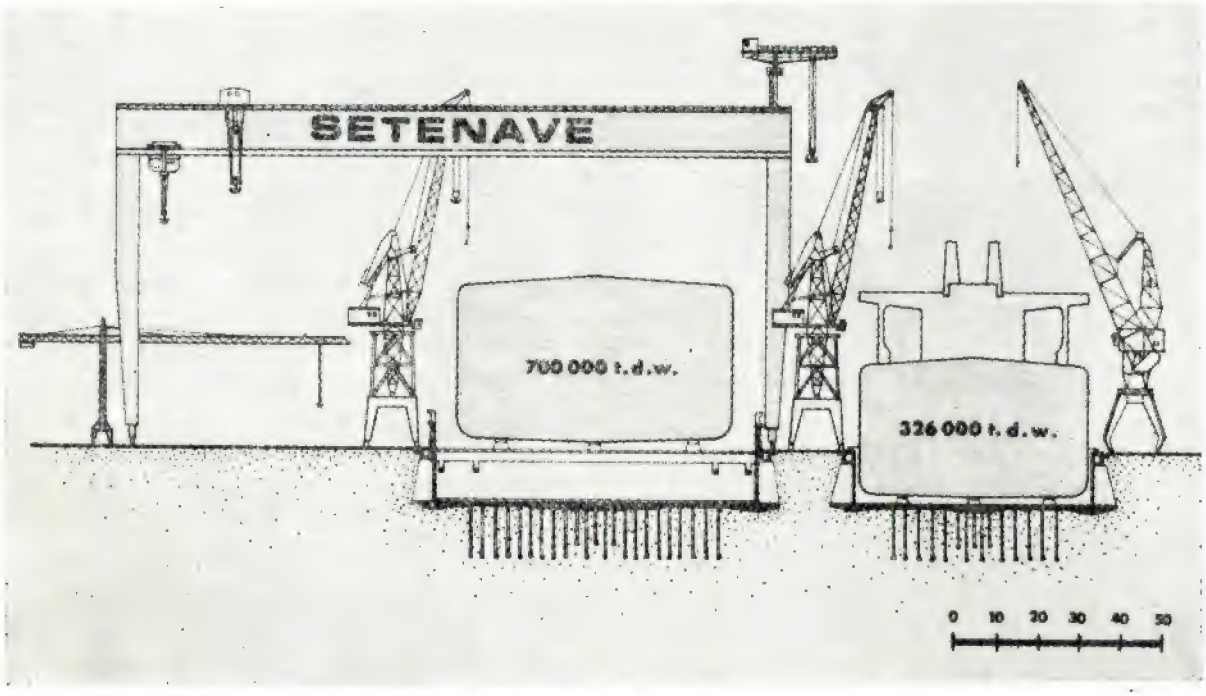
6 Parque de aço
7 Caldeiraria principal
8 Planos de premontagem
9 Oficinas de aprestamento e de tubos

ZONA DE REPARAÇÃO

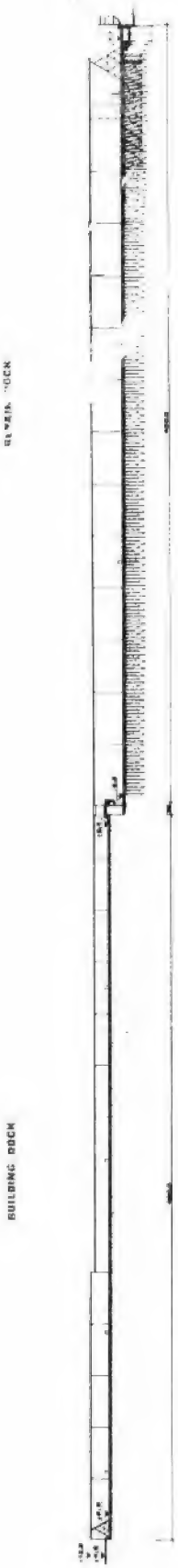
10 Caldeiraria ligeira
11 Oficinas de mecânica e de tubos
12 Escritórios centrais
13 Vestiários balneários
14 Escola
15 Cantinas
16 Armazéns gerais
17 Subestação principal
18 Central de compressores

PLANTA GERAL

O estaleiro ocupa uma área de cerca de 800 000 m² conquistados ao estuário por aterros de areias dragadas. O conjunto das 3 docas secas ocupa uma posição central entre a zona W (construção de novos cascos e seu aprestamento) e a zona E (reparação). A zona NE é a dos serviços gerais (escritórios centrais, cantina central, serviços médicos, armazém geral, sub-estação prncipal, central de compressores e central de gases).



CORTE TRANSVERSAL DO CONJUNTO DAS DOCAS SECAS



CORTE LONGITUDINAL: Doca de construção e doca de utilização múltipla

ção. A terceira doca, do lado E, confina com a zona das instalações afectas às reparações.

Das duas docas co-axiais, a de montante está destinada a ser a principal zona de montagem final de novos cascos: a doca de juzante, além de funcionar como eclusa para a comunicação da primeira com o estuário, será utilizada quer para montagem, quer para reparação. Estas docas constituem uma obra co mcaracteristicas muito diferentes do habitual. A estrutura da doca de montante é constituída apenas por uma laje encaixada entre dois muros, que sobressaem cerca de 6 m do nível terreno circundante. O fundo fica cerca de 2 m abaixo desse nível. A doca de juzante teria a configuração habitual das docas secas se o coroamento dos seus muros não tivesse de obedecer ao mesmo nível do coroamento da doca adjacente, por forma a possibilitar ao seu enchimento simultâneo e, assim, o seu funcionamento como eclusa permitindo transferir para o estuário os cascos acabados de construir. O fundo anda pela cota − 7 m, cerca de 10 m abaixo do fundo da primeira, perfazendo-se assim uma altura total de 18 m. As dimensões desta doca, 75 × 450 m, permitem a eclusagem de cascos para navios até 700 000 tdw. A doca de montante, com a mesma largura, ficou com 420 m de comprimento, mas pode ser facilmente ampliada para comprimentos praticamente ilimitados. Isto quando interessar montagem simultânea de navios que requeira tal ampliação.

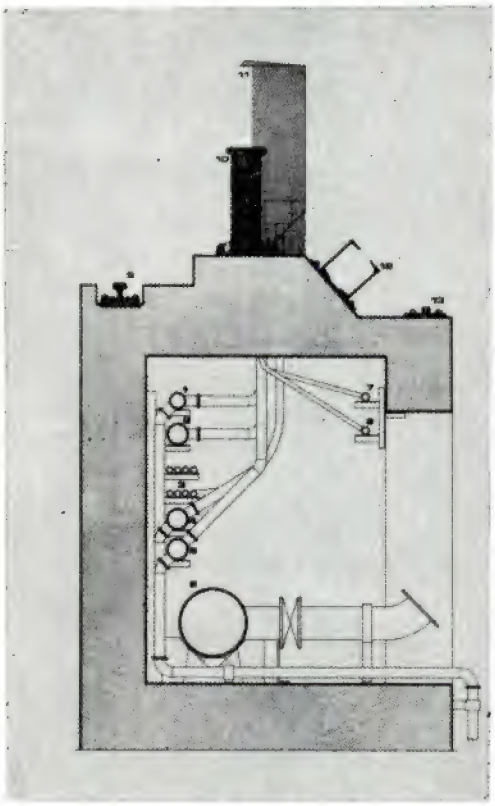
As duas docas deste grupo são servidas com um pórtico para 500 t, cujo vão de 150 m permite varrer o terrapleno adjacente do lado W, onde se localizam planos de pre-montagem de secções até àquela capacidade de elevação. Estes planos recebem por sua vez, transportadas em zorras ou transferidas por guindastes, secções do menores dimensões preparadas na caldeiraria principal ou em áreas ao ar livre adjacentes.

Qualquer das duas docas pode ser compartimentada em diversos troços por comportas amovíveis manobradas, em secções, pelo grande pórtico. Uma dessas portas é utilizada para fechar o topo posterior da doca de montante, quando do alagamento desta doca. A doca de juzante dispõe de uma comporta de rebater, utilizada para o seu esvaziamento. Quando deva ser cheia a níveis superiores aos das águas do estuário, utiliza-se uma comporta do tipo das comportas amovíveis referidas, que suporta um impulso no sentido de terra para o mar que poderá atingir o correspondente a perto de 18 m de água.

A doca do lado E foi concebida para operações de reparação, situando-se na proximidade das respectivas oficinas. A sua utilização como doca de construção é possível, mas menos indicada, por obrigar a percursos longos na ligação à caldeiraria principal e aos planos de pré-montagem e por não estar dotada dos potentes meios de movimentação de cargas que guarnecem o grupo das duas outras docas. Tem uma configuração trivial, com o coroamento de nível com os terraplenos.

A casa das bombas e o centro de comando comuns às três docas situam-se junto à margem ,entre as testas das docas. A sua capacidade (100 000 m³/h, cerca de 5000 CV) foi escolhida de acordo com as necessidades de rapidez de docagem para serviço de reparação e permite esvaziar a maior das docas utilizável nesse serviço em pouco mais de duas horas.

A movimentação de cargas nas docas é assegurada pelo pórtico de 500 t já mencionado e por guindastes de lança, parte dos quais circula no terrapleno entre as docas e pode servir qualquer delas. Deve sublinhar-se, como particularidade da concepção original da doca de construção, a possibilidade de acesso directo ao fundo dessa doca de grandes cargas transportadas em veículos rodados.



CORTE DO COROAMENTO DOS MUROS DA DOCA DE REPARAÇÃO

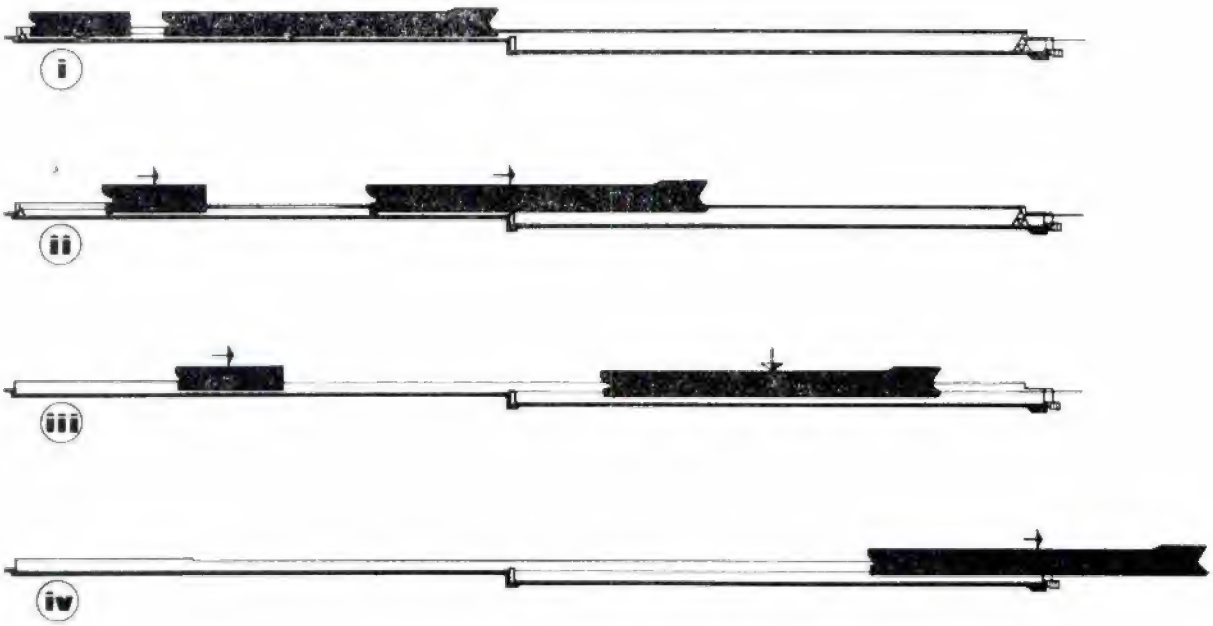
1 ar comprimido
2 água doce
3 cabos eléctricos
4 água, serviço de incêndios
5 água, serviço geral
6 água, lastro
7 acetilene
8 oxigénio
9 carril de guindaste
10 cabeço de amarração
11 quadros eléctricos
12 caminho de rolamento dos carros de alagem de navios
13 carril dos baileus de pintura

Além do equipamento de movimentação de cargas, quer as operações de construção quer as de reparação, exigem um variado conjunto de instalações. A figura em que se esquematiza a geometria do coroamento de um dos muros das docas e a disposição do equipamento nele instalado dá ideia do vulto e da variedade dessas instalações. Para a movimentação dos navios utiliza-se um sistema em que os cabos de alagem puxados por guinchos instalados nos topos das docas são guiados por carrinhos que circulam em caminhos de rolamento instalados ao longo dos muros laterais; sistema que facilita o manter o navio bem centrado durante a movimentação (o que é muito vantajoso, em especial, quando a folga aos muros laterais é apenas de alguns decimetros). As docas são servidas por redes de energia preparadas para as necessidades das operações fabris, da manobra do equipamento específico das docas e do abastecimento dos navios em reparação (estes exigindo correntes com diversas caracteristicas, consoante as normas adoptadas pelos seus armadores). A água é fornecida por várias redes conforme o seu destino, destacando-se, como valor do caudal disponível, a rede de água de lastro, dimensionada para o enchimento rápido dos navios tanques em ensaio. As operações fabris, além do sistema eléctrico, são apoiadas pelas redes de ar comprimido e de gases. As docas são ainda dotadas de caminhos de rolamento para um baileu destinado a trabalhos ligeiros no casco dos navios (pinturas, etc.) sem necessidade de escadas ou andaimes que embaraçassem a circulação no fundo das docas.

A elevada parcela com que a estrutura das docas concorre para o custo total de um estaleiro de construção/reparação navais, justifica grande apuro na investigação das condições naturais do local e na escolha dos tipos de estrutura e dos métodos do seu dimensionamento. Do vulto destas obras dão ideia os 180 000 m³ de betão, 14 000 t de varão de aço, 150 000 m² de superfície de moldes, e as 6500 estacas (12 m × ∅ 52 cm, moldadas no terreno) aplicados no grupo das três docas em apreço.

As docas estão engastadas num maciço de areias limpas, muito permeáveis (coef. de perm. 3 × 10 ∅m/s) constituído por uma camada natural aluvial, de espessura praticamente ilimitada pelo que respeita às condições impostas às obras, completada por um aterro de cerca de 5 m executado com areias dragadas nessa mesma camada. As caracteristicas desse maciço foram cuidadosamente investigadas: sondagens com amostragem e SPTs, análises granulométricas, sondagens com penetrómetros estáticos e dinâmicos, medições directas da permeabilidade e ensaios à escala natural das estacas de ancoragem. Durante a obra os aterros foram controlados, quer quanto às compacidades obtidas, quer quanto à eventual inclusão de lentilhas lodosas.

A alta permeabilidade do terreno constitui uma forte determinante na escolha dos tipos de estrutura,



MANOBRA DE LANÇAMENTO DE UM NOVO CASCO

i — na doca de construção está um casco concluido e uma secção de ré em construção; a doca-eclusa está livre; ambas as docas vazias.

ii — as docas estão alagadas até ao nível máximo; o novo casco está sendo transferido para a doca-eclusa; aproveita-se o alagamento para mudar a posição da secção de ré.

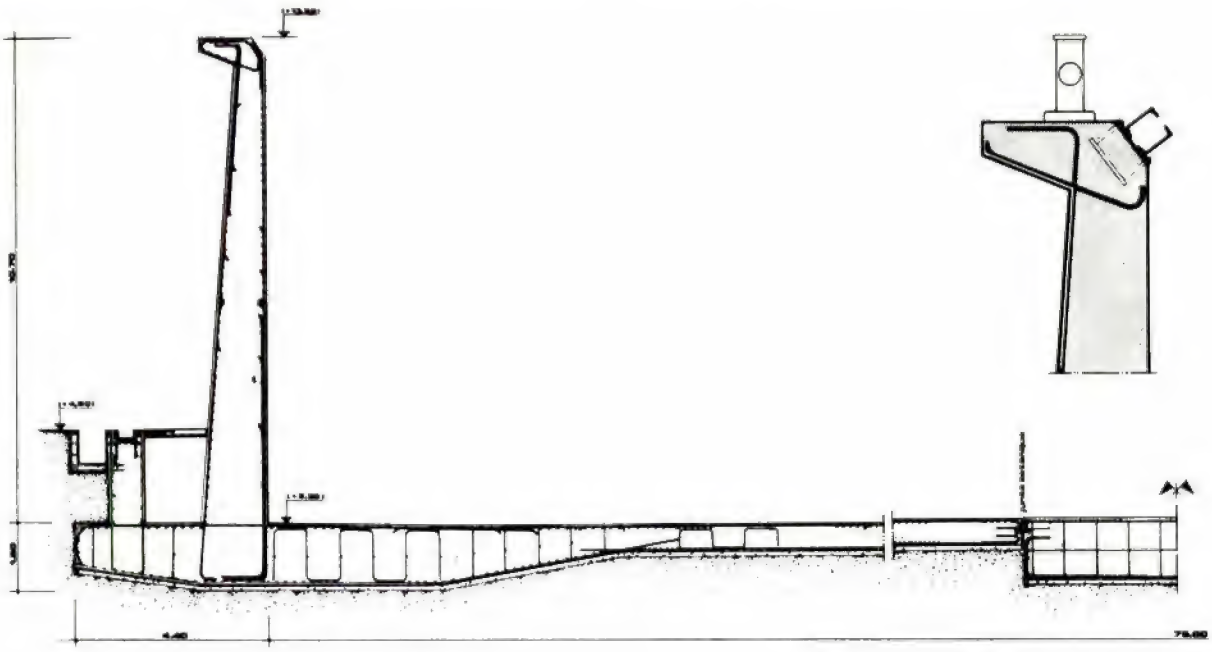
iii — a água é descida até deixar seca a doca de construção, acertando com o nível do estuário na doca-eclusa.

iv — aberta a porta, o casco é rebocado para fora, deixando a doca-eclusa livre para qualquer utilização.

que suportam pressões hidrostáticas praticamente correspondentes ao nível da maré no estuário, e dos procedimentos de construção. Para as duas docas mais profundas, a construção ao abrigo dum importante sistema de rebaixamento do nível freático impunha-se como solução não contestável e a ancoragem dos fundos mostrou-se francamente mais vantajosa do que o contrabalançar as pressões hidrostáticas exclusivamente com o peso das estruturas. Com a solução adoptada para a doca de construção, fundada a uma cota onde as impulsões hidráulicas são insignificantes, foram possíveis uma importante economia no custo da estrutura e a execução em prazo muito curto. Vantagens estas que, juntas às que o esquema oferecia à operação do estaleiro, mencionadas atrás, foram confrontadas favoravelmente com gastos de instalação e inconvenientes de exploração de sinal contrário, nomeadamente, acréscimo de custo da doca-eclusa (muros laterais sobre-elevados, porta suplementar suportando impulsos de dentro para fora). Assim, a doca de construção pode ser iniciada na fase inicial do rebaixamento do nível freático da área ocupada pelo conjunto das três docas (operação que ocupou 6 dos 24 meses que levaram a concluir as estruturas do conjunto); pôde ser adoptada uma fundação directa sobre os aterros compactados, executada com um rebaixamento das águas praticamente equivalente apenas à amplitude da maré, solução que além da poupança do custo das estacas de ancoragem, a que se recorreu para as restantes docas, permitiu uma redução suplementar de prazo.

O apuro do reconhecimento geotecnico consentiu dimensionar as estruturas com muita confiança no valor das solicitações do meio encaixante assim como permitiu dimensionar com justeza as obras provisórias (ensecadeira a sistema de rebaixamento de águas). Escolhidas as estacas de betão moldadas no terreno como meio de ancoragem contra as sub-pressões criou-se um problema de dimensionamento assás complexo e trabalhoso na medida em que os requisitos de minimização de custos impunham um dimensionamento à justa. A situação batia nos seguintes pontos: estacas especialmente escolhidas com vista a funcionarem como tirantes verticais, mas também solicitadas (alternadamente) a compressões significativas, grupos de estacas inclinadas para ancoragem dos esforços devidos à impulsão (de dentro para fora) na grande porta da doca-eclusa; grande diversidade de combinações de solicitações, nomeadamente no caso de ensaios de enchimento dos navios tanques. A utilização do computador (IBM 1130, com traçador de gráficos) deu uma saída satisfatória para as dificuldades, permitindo abordar os cálculos da laje de fundo como laje apoiada simultaneamente em dois meios elásticos com módulos de elasticidade diferentes (terreno e sistema de estacas), considerar as variações de secção da laje e a sua integração (para a secção corrente) numa peça em U englobando os dois muros laterais.

O empreendimento do estaleiro de Setúbal foi lançado em princípios de 1971, realizando-se então os estudos técnicos preliminares e a escolha do terreno, numa área do estuário do Sado a conquistar por aterro. As dragagens e aterros ocuparam o ano de 1972 e durante este ano desenvolveu-se a maior parte do trabalho de projecto. A construção das docas iniciou-se com o ano de 1973. Em princípios de 1974 já a doca de construção permitia, embora não terminada, o início da montagem do primeiro casco. Em Janeiro de 1975 foram dadas por terminadas as duas docas mais baixas, iniciando-se a remoção da respectiva ensecadeira.



SECÇÃO TRANSVERSAL DA ESTRUTURA DA DOCA DE CONSTRUÇÃO

Fundada directamente sobre o terreno arenoso, a secção transversal compreende duas peças laterais, separadas pela viga de quilha central. Cada peça lateral é moldada com 30 m de comprimento. Nas restantes duas docas a secção transversal corrente é um U monolítico, fundado no conjunto terreno + estacas, moldado em troços também de 30 m

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
DIDACTA — European Educational Materials Fair	Basilca 23 a 27 de Março - 76
III Conference ON ELECTRODE PHENOMENA IN GAS DISCHARGES	Lisboa Maio - 76
V Simpósio Iberoamericano de Catálise	Lisboa 25 a 30 de Julho - 76 Fundação Gulbenkian
International Trade Fair	Elmia, Jönköping, Sweden 27 de Setembro a 1 de Outubro - 76
First International Timplate Conference	Londres 5 a 8 de Outubro - 76 In Research Institute
1 European Colloquium on Construction Quality Controp	Madrid 11, 12 e 13 de Novembro - 76

FUNDAÇÕES ESPECIAIS
ESTUDOS GEOTÉCNICOS
CAPTAÇÕES DE ÁGUA

Sopecate

ESPECIALISTA DESDE 1947

R. DO ARSENAL, 146 - 2°
Telf. 320208 - 364010 - 360437
LISBOA - 2

ELECTRO-ARCO, S.A.R.L.

- FABRICANTE DE ELÉCTRODOS E ARAME PARA SOLDADURA AUTOMÁTICA
- EQUIPAMENTO PARA SOLDADURA ELÉCTRICA E OXI-ACETILÉNICA
- ACESSÓRIOS

★

MATERIAL APROVADO POR
AMERICAN BUREAU OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
DET NORSKE VERITAS
GERMANISCHER LLOYD
INSTITUTO DE SOLDADURA
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING

★

SEDE, FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Rua Vice-Almirante Azevedo Coutinho, 4
VENDA NOVA — AMADORA
Telefs. 97 63 21 - 97 17 33 - 97 64 71 - 97 06 13
DELEGAÇÃO NO NORTE
Rua Delfim Ferreira, 525
PORTO
Telef. 6 21 24

Topografia Geral

2.º VOLUME

Pelo Engenheiro

A. C. XEREZ

Preço de cada volume

180$00

•

Desconto: 10% aos assinantes

Pedidos à Técnica

convectores eléctricos

EFACEC

calor
EFACEC
calor de prestígio

MODELO 4M

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 430

Ano L — Novembro 1975

C. D. U.621-135:532.5

ANTÓNIO A. S. DE BARROS

ANALISE TEORICA DAS CARACTERISTICAS MECANICAS DE UM ESCOAMENTO RADIAL NUMA TURBOMAQUINA CENTRIFUGA

Técnica N.º 430 — L — 11-1975, p. 47 a 66

Neste trabalho são apresentadas, de uma forma condensada, as deduções das equações gerais das velocidades e acelerações e energia num escoamento sem perdas no interior da roda de uma turbomáquina radial. É, seguidamente, feita a aplicação das equações estabelecidas a vários escoamentos: escoamento a energia constante e escoamentos com aumento de energia (velocidade relativa constante, inclinação radial constante e pá plana) e, finalmente, escoamentos com entrada e saída impostas: pá circular e variação linear da inclinação tangencial.

C. D. U. 536:533.27.5

J. A. MARTINHO SIMÕES

e

C. A. NIETO DE CASTRO

TERMODINAMICA MOLECULAR DO GAS PERFEITO

Técnica N.º 430 — L — 11-1975, p. 67 a 80

Apresenta-se uma revisão crítica da determinação teórica de propriedades termodinâmicas de gases perfeitos. Com base na Termodinâmica Estatística e em dados fornecidos pela análise espectroscópica indicam-se métodos de cálculo de várias contribuições para os valores das funções termodinâmicas. Finalmente, aplica-se o estudo às moléculas de CO_2, NH_3 e SO_2 e comparam-se resultados calculados de S e Cp com valores experimentais.

C. D. U. 627.31/32

J. M. GONÇALVES FIGUEIRA

ORIENTAÇÃO DO PROJECTO DE DOCAS SECAS (ESTALEIRO NAVAL DA SETENAVE, SETÚBAL)

Técnica N.º 430 — L — 11-1975, p. 81 a 88

Mencionam-se os actuais condicionamentos relativos ao projecto de docas secas para construção e para reparações navais, com enfase nos imperativos da sua integração em estaleiros orientados como verdadeiras unidades industriais. Descreve-se sucintamente a orientação seguida no projecto das docas do novo estaleiro português em acabamento no estuário do Sado, Setúbal.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.º 430

L — November 1975

U. D. C. 627.31/32

J. M. GONÇALVES FIGUEIRA

REQUIREMENTS FOR DRY DOCKS DESIGN (SETENAVE SHIPYARD, SETÚBAL)

Técnica N.º 430 — L — 11-1975, p. 81 a 88

The main conditions governing shipbuilding and shiprepairing dry docks design is mentioned. Emphasis is put on the requirements for integration of these docks in shipyard projects conceived as high productive industrial units. Procedures adopted for the dry docks design at the new shipyard at the Setubal estuary (Portugal) are reported.

U. D. C. 621-135:532.5

ANTÓNIO A. S. DE BARROS

THEORETICAL ANALYSIS OF THE MECHANICAL FEATURES OF THE FLOW IN A CENTRIFUGAL TURBOMACHINE

Técnica N.º 430 — L — 11-1975, p. 47 a 66

Tris study establish the velouty and aceleration equations for the flow in a centrifugal turbomachine, wich are applied to some types of flow: without and with energy increase.

U. D. C. 536:533.27.5

J. A. MARTINHO SIMÕES

C. A. NIETO DE CASTRO

MOLECULAR THERMODYNAMICS OF THE PERFECT GAS

Técnica N.º 430 — L — 11-1975, p. 67 a 80

A critical review about the theoretical determination of theromdynamic properties of perfect gases is made. Based in Statistical thermodynamics and in data derived from spectroscopic analysis, methods of calculus of several contributions for the values of the thermodynamic functions are indicated. Finally, the study is applied to the calculation of moar entropy and heat capacity of simple polyatomic molecules, viz CO_2, NH_3 and SO_2. A comparison with experimental values is made.

Publicações Recebidas

PUBLICAÇÕES PERIÓDICAS

— AGROS
Associação dos Estudantes de Agronomia

— ANALLES DE MECÁNICA Y ELECTRICIDAD
Asociacion de Ingenieros del I. C. A. I.

— ASEA — REVUE

— ACTA TÉCHNICA
Academiae Scientiarum Hungariae

— ANAIS DO CLUBE MILITAR NAVAL

— ANALYTICAL ABSTRACTS
Society for Analytical Chemistry

— ACIER - STAHL - STELL

— ANNALES
Institut Technique du Batiment et des Travaux Public

— AEG - TELEFUNKEN AL DIA

— AR COMPRIMIDO
Atlas Copco

— BOLETIM DA CÂMARA MUNICIPAL DE SÁ DA BANDEIRA

— BOLETIM ECONÓMICO E FINANCEIRO
Banco Borges e Irmão

— BOLETIM
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM MENSAL DE INFORMAÇÃO
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— BULLETIN OF THE SEISMOGRAPHIC STATIONS
University of California

— BOLETIM DEL CEMENTO PORTLAND
Instituto del Cemento Portland Argentino

— BOLETIM GTH
Gabinete Técnico da Habitação da Câmara Municipal de Lisboa

— BOLETIM
Sociedade Geológica de Portugal

— BOLETIM INFORMATIVO IRANOR
Instituto Nacional de Racionalizacion y Normalizacion

— BOLETIM DA ELECTROQUÍMICA E CORROSÃO
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM
Departamento de Imprensa e Informação do Governo da República Federal da Alemanha

— BOLETINUL
Institutului Politehnic Bucaresti

— BOLETIM
Associação Industrial de Angola

— BOLETIM DO PORTO DE LISBOA
Administração - Geral do Porto de Lisboa

— BOLETIM DO SERVIÇO CARTOGRÁFICO DO EXÉRCITO

— BOLETIM DE MINAS
Direcção Geral de Minas e Serviços Geológicos

— BULLETIN DE LA CHAMBRE DE COMMERCE BELGE AU PORTUGAL

— BULLETIN
Agence Internationale de L'energie Atomique
Instituto dos Produtos Florestais

— CENIM

— CORTIÇA
Centro Nacional de Investigaciones Metalurgicas

— (JOURNAL OF) CHEMICAL EDUCATION
Division of Chemical Education of the American Chemical Society

— CIMENTO E CONCRETO
Associação Brasileira de Cimento Portland

— COMUNICAÇÕES ELÉCTRICAS
International Telephone and Telegraph Corporation

— CONSTRUCTI

— CARTA GEOLÓGICA DE ANGOLA
Direcção Pronvincial dos Serviços de Geologia e Minas

— CEMENTO HORMIGÓN

— COURRIER CERN

— COLLECTION
Czechoslovak Academy of Sciences

— DYNA
Asociacion de Engenieros Industriales de España

— EL ESTAÑO Y SUS APLICACIONES
Tin Research Institute

— ELECERICITE DE FRANCE
Direction des Etudes et Recherches

— ELECTRICIDADE
Empresa Editorial Electrotécnica Edel, Lda.

— ENDEAVOUR
Imperial Chemical Industries Limited

— ESTUDOS
Banco Fomento Nacional

— ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS
Serviço de Fomento mineiro

— ELECTRICAL COMMUNICATION
International Telephone and Telegraph Corporation

— ECONOMIC REVIEW
Câmara de Comércio Luso-Britanica

— FUNDIÇÃO
Associação Portuguesa de Fundição

— FUNDEXPORT
Fundo de Fomento de Exportação

— GEOTÉCNICA
Revista da Sociedade Portuguesa de Geotécnica

— INFORMES DE LA CONSTRUCCIÓN
Instituto Eduardo Torroja

— ION
Sindicato Nacional de Industrias Químicas

— INDÚSTRIA DE MOÇAMBIQUE
Associação Industrial de Moçambique

— LA HOUILLE BLANCHE
Société Hydrotechnique de France

— LES NOUVELLES DE L' E. I. B.

— METALLURGIA AND METAL FORMING
National Association of drop Forgers and Stampers

— MACHINE TOOL REVIEW

— NOTICIÁRIO DOS ELASTÔMEROS
du Pont

— ONU (CHRONIQUE MENSUELLE)
Service de L'information de L'organisation des Nations Unies

— O PROPULSOR
Sindicato Nacional dos Oficiais de Marinha Mercante

— PRELO
Imprensa Nacional - Casa da Moeda

— PORTUGAL - ALEMANHA
Câmara de Comércio e Indústria Luso-Alemã

— REVISTA DE CIÊNCIAS-BIOLÓGICAS
Universidade de Lourenço Marques

— REVUE LANDIS E GYR (EDITION ELECTRICITÉ)

— REVUE D'IENA

— REVUE SIEMENS
Siemens Antiengesellschaft

— REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

— LA REACHERCHE AÉROSPATIALE
Office National D'Études et de Recherchse Aérospatiales

— REVISTA DE METALURGIA
Cenim - Centro Nacional de Investigaciones Metalurgicas

— RAIL INTERNATIONAL
Association Internationale du congrès des chemins do fer et de L'Union Internationale des Chemins do fer

— REVISTA TÉCNICA SULZER

— REVISTA DANFOSS

— REVISTA AGRONÓMICA
Sociedade de Ciências Agronómicas de Portugal

— TECHNIQUES FRANÇAISES (BATIMENT TRAVAUX PUBLICS URBANISME)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (CHIMIE GAZ PETROLE)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (INDUSTRIE DE METAUX
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (TRANSPORTS)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (CHIMIE GAZ PETROLE) BIENS DE CONSOMMATION)
Services Économiques de L'Embassade de France

— WORLD HEALTH ORGANIZATION PUBLICATIONS
World Health Organization

— WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER HOCSCHULE
Architektur und Bauwesen Weimar

VICENTE FERREIRA E BRAZÃO FARINHA

TABELAS TÉCNICAS

técnica

REVISTA DE ENGENHARIA DA ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES
DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - LISBOA

7ª EDIÇÃO REVISTA E ACTUALIZADA
PREÇO 250.00
DESC. 10% AOS ASSINANTES

Publicidade com critério.

Anuncie na

técnica REVISTA DE ENGENHARIA